TS : devoir sur feuille n° 4

I

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z)=z^3-\left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z-2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0=\mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z)=0$.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que

$$P(z)=\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right).$$

   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}}=1+\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{B}}=1-\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{J}}=\mathrm{i}\sqrt{2}\quad \text{et } z_{\mathrm{K}}=\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}}=-1+\mathrm{i}$. On considère !a rotation r de centre O qui transforme J en D.
   (a) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.

   on remarquera qu'il s'agit de l'angle $\left(\overrightarrow{OJ}\,;\,\overrightarrow{OD}\right)$ *qui est un argument du nombre complexe* $\dfrac{z_D}{z_J}$*, donc de* $\arg\left(z_D\right)-\arg\left(z_J\right)$.

   (b) Soit C l'image du point L par la rotation r.
      i. Montrer que $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{L}}-z_{\mathrm{O}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
      ii. Déterminer l'affixe du point C.
5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

II

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2=z\overline{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

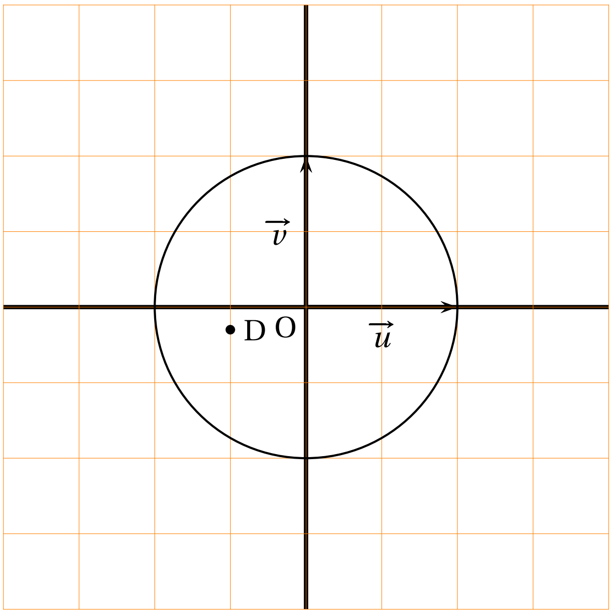
Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z\neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z'=\frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}}=-2+\mathrm{i}$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{\mathrm{C}'}$ du point C$'$ image de C par la transformation f, et placer les points C et C$'$ dans le repère donné à la fin de l'exercice.
   (b) Montrer que le point C$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C$'$ sont alignés.

   Indication : on rappelle que si A, B et C sont trois points d'affixes z_A, z_B et z_C, $\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$.
2. Déterminer et représenter sur la figure donnée à la fin de l'exercice l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.
4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z\neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.

   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?
5. On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D$'$ par la transformation f.



III

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$
Affecter à U la valeur $3U-2k+3$
Fin pour
Sortie
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.

   (a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

   (b) Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.

   (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

   (d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

IV

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703\,;\,0,704[$.

   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **Étude de la fonction f**

   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   (b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

   (e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.