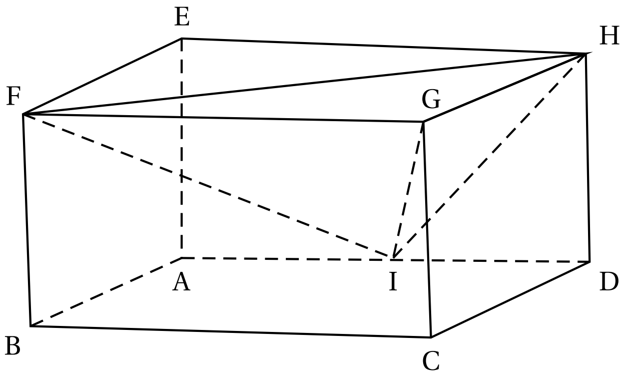
TS : devoir sur feuille n° 3

I

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit

ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.

On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\check{D}~;~\overrightarrow{AB}\check{D}~;~\overrightarrow{AI}\check{D}~;~\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.
2. (a) Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\dfrac{1}{3}$.

   (b) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.

   En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).
3. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

   (c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).
4. (a) La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH)† ?

   (b) Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

   (c) Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

   Soit Γ la sphère de centre G passant par K.

   Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH)† ?

   (On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout réel x non nul :
$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2}.$$
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale $\mathscr{D}$ et une asymptote oblique $\mathscr{D}'$ dont on précisera des équations.
4. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}'$.
5. Montrer que pour tout réel x non nul,
$$f'(x) = \frac{x(x-1)^2(x+2)}{x^4}.$$
   En déduire les variations de f.
6. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$, parallèle à $\mathscr{D}'$.
7. Représenter sur un même graphique T, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
8. Soit D_λ la droite d'équation $y = x + \lambda$ où λ est un paramètre réel.

   Préciser le nombre de points d'intersection de D_λ et $\mathscr{C}$ suivant les valeurs de λ.

III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

1. (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   (b) Calculer la dérivée seconde f'' de f'.
2. (a) Déterminer les variations de la fonction f'.

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f'.

   Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α et que cette solution appartient à l'intervalle $]-\infty~;~-1]$.

   (c) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. (a) Déterminer le signe de la fonction f'.

   (b) Dresser le tableau de variation d e la fonction f.

   (c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha(4-\alpha)}{4}$.

   (d) Déterminer le nombre de racines du polynôme f .

IV

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K+1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   (b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   (b) Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   (c) En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.