TS : devoir sur feuillen° 2

La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques. » (Blaise Pascal)

I

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

II

On considère la suite (u_n) construite ainsi :
$u_1 = 0,1$; $u_2 = 0,12$; $u_3 = 0,123$, $u_4 = 0,1234$; ... ;
$u_{10} = 0,12345678910$; etc.
u_n est obtenu en mettant bout à bout après la virgule les écritures décimales des entiers de 1 à n.

1. Quel serait le nombre u_{11} ?
2. Expliquer pourquoi cette suite (u_n) est convergente.

III

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ; justifier ou donner un contre-exemple.
(u_n) et (v_n) sont des suites réelles.

1. On suppose que (u_n) et (v_n) sont des suites à termes positifs et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et si $v_n > u_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
3. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Alors, les termes u_n sont tous positifs à partir d'un certain rang.
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, alors (u_n) et (v_n) convergent toutes deux et ce vers la même limite.

IV

Répondre par VRAI ou FAUX aux questions suivantes en justifiant .
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{2}{3}u_n$.
On définit les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \dfrac{2}{3}u_n$.

1. La suite (v_n) est arithmétique.
2. La suite (w_n) est constante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{3}{5}(w_n - v_n)$.
4. La suite (u_n) n'a pas de limite finie.

V

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :
$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$
   (a) Calculer v_0.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   (d) Exprimer v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :
$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$
   (a) Calculer w_0.
   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   (d) Exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n
$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$
5. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

VI Légende de l'échiquier

Selon une légende, un roi demanda à l'homme qui a créé le jeu d'échecs : « Que voulez-vous comme récompense pour votre invention ? » L'homme réfléchit un instant, puis répondit : « Mon roi, donnez-moi un grain de blé sur la première case, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième case, huit sur la quatrième et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les cases du jeu soit rempli. ».

1. Calculer le nombre exact de grains de blé qu'il faudrait mettre sur échiquier, puis en donner une approximation.
2. On considère que 1000 grains ont une masse de 43 g. En déduire la masse en Kg que représenteraient les grains sur l'échiquier.
3. La production mondiale de blé en 2013 fut de 653 millions de tonnes. Comparer la masse de grains de blé sur l'échiquier à cette production mondiale.
   Que peut-on en conclure ?
4. Un grain de blé occupe un volume d'environ 20 mm^3. Quel volume, en m^3, serait occupé par le blé placé sur l'échiquier ?
5. Imaginons qu'on entrepose ce blé dans un silo à base carrée de 100 m de côté. Quelle devrait être la hauteur de ce silo ?

VII

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
   Montrer qua le suite (v_n) est géométrique ; on en donnera le premier terme et la raison.
3. Exprimer alors v_n en fonction de n.
4. En utilisant la relation exprimant v_n en fonction de u_n, exprimer u_n en fonction de v_n.
5. En déduire u_n en fonction de n.
   Vérifier que l'on retrouve les valeurs de u_1 et u_2 calculées à la première question.
6. Déterminer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.
   En déduire la limite de u_n.

VIII Nombre d'or et suite de Fibonacci

On considère la suite (u_n) de Fibonacci définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On pose $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\phi^2 = \phi + 1$.
2. En déduire une expression de ϕ^n sous la forme $a_n\phi + b_n$ où a_n et b_n sont des entiers pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$.
3. Démontrer que, pour tout n, il existe des nombre a_n et b_n tels que $\phi^n = a_n\phi + b_n$.
4. Établir des relations de récurrences donnant permettant de calculer les nombres a_n et b_n.
5. Proposer un algorithme qui permette d'afficher les valeurs de a_n et de b_n pour un rang n choisi par l'utilisateur.