TS : contrôle (récurrence et suites)

2 heures

I (3 points)

Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

II (3 points)

On donne la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n , par : $\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout naturel n , on a : $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

III (4 points)

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout $n \geqslant 1$: $n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1$.
Ce tableau donne les dix premiers termes de la suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
2. Conjecturer la nature de la suite ; en déduire une conjecture sur l'expression de w_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture.
4. En déduire la valeur de $w_{2\,000}$.

IV (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
3. Démontrer que la suite $\left(n^2\right)$ n'est pas majorée.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).
5. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4.
6. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
7. Démontrer par récurrence que cette expression est valable pour tout entier naturel n .

V (5 points)

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique ; on précisera la raison et le premier terme de cette suite.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. À partir de la définition de v_n, montrer que, pour tout n, $u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.