TS1-TS2 : contrôle commun n° 3 (4 heures)

I Q.C.M. (5 points)

Pour toutes les questions, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$; z_A désigne l'affixe d'un point A, et z_B désigne l'affixe d'un point B.
Pour chaque question, il n'y a qu'une seule bonne réponse. Donner celle-ci et **justifier** votre choix.

Questions	Réponses
1. Si $z = 4+3\mathrm{i}$, alors	☐ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$ ☐ $\dfrac{1}{z} = 4-3\mathrm{i}$ ☐ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{25}\mathrm{i}$
2. Si $Z = \dfrac{4-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$, alors Z est égal à	☐ $\dfrac{2-9\mathrm{i}}{5}$ ☐ $\dfrac{2-9\mathrm{i}}{-3}$ ☐ $\dfrac{6+7\mathrm{i}}{5}$
3. Le conjugué de $Z = \dfrac{1-z}{1+\mathrm{i}}$, où $z \in \mathbb{C}$, est égal à	☐ $\dfrac{1-\overline{z}}{1-\mathrm{i}}$ ☐ $\dfrac{1+\overline{z}}{1+\mathrm{i}}$ ☐ $\dfrac{1+z}{1+\mathrm{i}}$
4. Un argument de $z = -3\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\mathrm{i}}\right)$ est égal à	☐ $\dfrac{7\pi}{6}$ ☐ $\dfrac{\pi}{6}$ ☐ $\dfrac{5\pi}{6}$
	suite sur la page suivante...

Questions	Réponses
5. On sait que $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ et que $z' = -7$; alors :	☐ $\arg\left(zz'\right) = \dfrac{\pi}{3}$ ☐ $\arg\left(zz'\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$ ☐ $\arg\left(zz'\right) = -\dfrac{\pi}{3}$
6. Soit n un entier naturel. Le nombre $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si,	☐ n est pair ☐ n est un multiple de 3 ☐ jamais
7. On sait que $z_A = -3$ et que $z_B = 2\mathrm{i}$; alors AB est égal à	☐ 5 ☐ $\sqrt{13}$ ☐ $3+2\mathrm{i}$
8. Si $z_A = 1-3\sqrt{3}$ et $z_B = 1-3\mathrm{i}$, alors l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$ a pour mesure	☐ $\dfrac{5\pi}{6}$ ☐ $-\dfrac{\pi}{6}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
9. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\lvert z-1\rvert = \lvert z+\mathrm{i}\rvert$ est la droite d'équation :	☐ $y = x$ ☐ $y = x-1$ ☐ $y = -x$
10. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ est inclus dans :	☐ la droite d'équation $y = x+2$ ☐ le cercle de centre I d'affixe $1-\mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{2}$ ☐ la médiatrice du segment $[AB]$ où A est le point d'affixe -2 et B celui d'affixe 2i

II (5 points)

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{2 - \mathrm{i}z}{1 - z}.$$

L'exercice étudie quelques propriétés de f.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensembles trouvés aux questions **1.** et **2.**.

A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe $-2\mathrm{i}$.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

   Montrer que $f(z) = \dfrac{-2x + y + 2}{(1-x)^2 + (-y)^2} + \mathrm{i}\dfrac{x^2 - x + y^2 + 2y}{(1-x)^2 + (-y)^2}$.

   En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel et représenter cet ensemble.

2. On pose $z' = f(z)$.

   (a) Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour z' différent de i, z en fonction de z'.

   (b) M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i).

   Montrer que $\mathrm{O}M = \dfrac{M'\mathrm{C}}{M'\mathrm{D}}$ où C et D sont les points d'affixes respectives 2 et i.

   (c) Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.

   (d) Montrer que, si M est un point de l'axe des réels, différent de O et de A, alors M' appartient à la droite (CD).

II (5 points)

Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité

Partie A :

À chaque lettre de l'alphabet, on associe , grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Ét1pe 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Ét2pe 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.

Ét3pe 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1\ [26]$.
3. Démontrer alors l'équivalence
$$9m + 5 \equiv p\ [26] \Leftrightarrow m = 3p - 15\ [26].$$
4. Décoder alors la lettre B.

Partie B :

On considère l'ensemble des matrices à deux lignes et deux colonnes.

On appelle matrice identité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a : $I \times M = M$.
2. On appelle matrice inverse la matrice M^{-1} définie par $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

   Montrer, en détaillant le calcul, que $M \times M^{-1} = I$.
3. À quelle condition peut-on calculer M^{-1} ?
4. Application : calculer M^{-1}, inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

III (5 points)

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1,\ b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$

Soit D une droite munie d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimez u_n en fonction de n.
   (c) Calculez $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. (a) Comparez a_n et b_n.
   (b) Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interprétez géométriquement ces résultats.
   (c) Démontrez que la suite (a_n) est majorée. Que peut-on en conclure ?
   (d) Démontrez que la suite (b_n) est minorée. Que peut-on en conclure ?
   (e) Déduisez-en que les deux suites (a_n) et (b_n) ont la même limite.
   Interprétez géométriquement ce résultat.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.

IV Optimisation d'une aire (5 points)

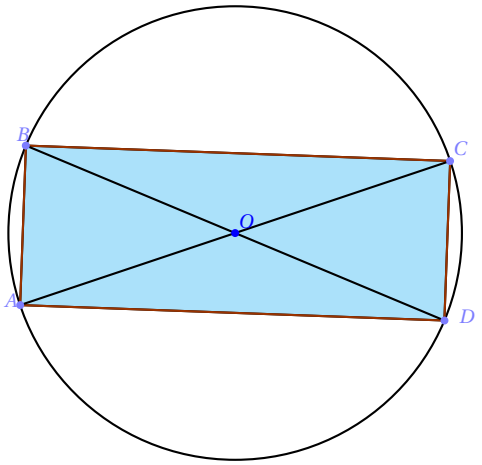
Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;\,2]$ par $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

1. Intervalle d'étude :
   Expliquer pourquoi on peut limiter l'etude de f à l'intervalle $[0\,;\,2]$.
2. Dérivabilité de f :
   (a) Étudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultaI obtenu.
   (b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,2[$ et calculer sa dérivée.
   (c) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur $[0\,;\,2]$.
3. Représentation graphique de f
   (a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Justifier que, pour tout x de $[0\,;2]$, $f(x) \leqslant 2x$.
   En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T sur $[0\,;2]$.
   Tracer T puis $\mathscr{C}$ sur [-2 ; :2].
4. Solutions de l'équation (E) : $f(x) = 1$.
   Prouver que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle [-2 ; 2].
   Donner un encadrement de ces reels à 10^{-2} près.

Partie B : Étude d'une aire

Soient Γ un cercle de centre O et de rayon 1 et $ABCD$ un rectangle inscrit dans Γ.



On pose $AB = x$ et on associe, à ce réel x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de ce rectangle $ABCD$.

1. Préciser l'intervalle J que peut décrire la variable x et calculer cette aire $\mathscr{A}(x)$.
2. Déterminer à l'aide des résultats de la partie A :
   (a) pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $ABCD$ est maximale ; préciser dans ce cas, la valeur de cette aire et la nature du quadrilatère $ABCD$.
   (b) pour quelle(s) valeur(s) l'aire du rectangle $ABCD$ est égale à 1.