Révisions (feuille 2)

I Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+\mathrm{i}$.

   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

II Liban mai 2014

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.

Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit le loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.

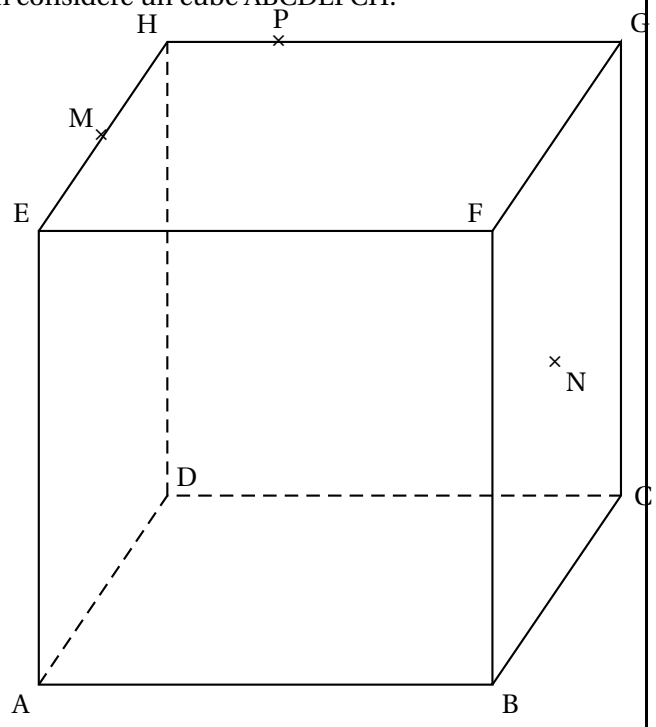
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.

On note Z' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T'-15}{\sigma'}$

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

III Amérique du Nord mai 2014

On considère un cube ABCDEFCH.



On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que
$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   (a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

IV Polynésie juin 2014

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ
   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
   (a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
   (b) Justifier que, pour tout réel $x, h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.
   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
   (c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   (e) En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.
   (f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
   (a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
   (b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.