TS : feuille d'exercices de bac

I Liban mai 2015 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :
pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire la valeur exacte de u_1.
3. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ...
	|Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

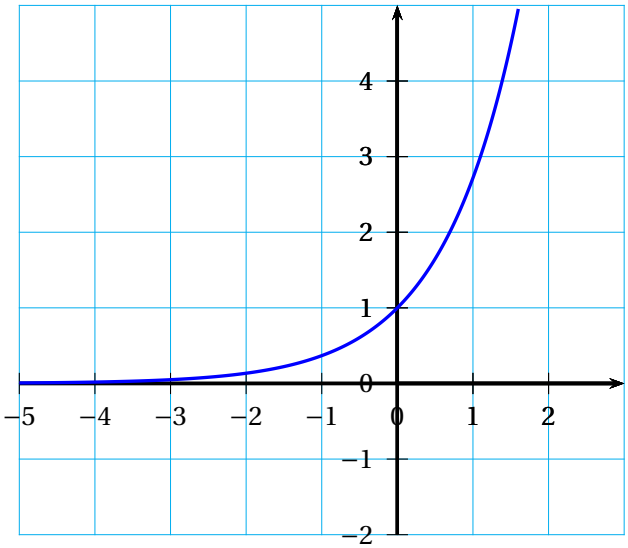
   (b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

   Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?
4. (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

II Liban mai 2015 (3 points)

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.
   Démontrer que la droite $\mathscr{D}_{\mathrm{e}}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.
3. Démontrer cette conjecture.

III Liban mai 2015 (5 points)

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

   (b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.
4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A. *estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

   Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?
5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.

   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.

   Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

IV Nouvelle-Calédonie mars 2015 (5 points

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
Soit a un nombre réel strictement positif.
On note Δ_a la droite d'équation $y = ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a.
Pour cela. on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^x - ax.$$

On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. **Étude du cas particulier** $a = 2$

   La fonction f_2 est donc définie pour tout x réel par $f_2(x) = \mathrm{e}^x - 2x$.

   (a) Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (*on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.*

   (b) En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.
2. **Étude du cas général où a est un réel strictement positif**

   (a) Déterminer les limites de la fonction f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a - a\ln a$.

   (c) Étudier le signe de $a - a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.

   (d) Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.