TS : Exercices de bac de géométrie dans l'espace (2)

I Amérique du Nord mai 2013

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;\,-1\,;\,3)$.
   (a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   (d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.
   (a) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   (b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique

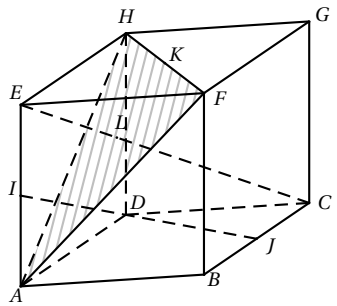
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}.$$

   (c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

II Antilles-Guyane juin 2013

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
On appelle $\mathscr{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment $[AE]$,
le point J est le milieu du segment $[BC]$,
le point K est le milieu du segment $[HF]$,
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. (a) Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   (b) Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   (c) Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
   (d) Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
2. (a) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
   (b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à (-1).
   (c) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
   (d) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 2.
3. Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:
   (a) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y+z-1=0$.
   (b) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x-y+z=0$.
   (c) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$.
   (d) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$.
4. (a) $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   (b) $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   (c) $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   (d) $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
5. (a) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
   (b) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.
   (c) $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
   (d) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

Correction

I Amérique du Nord mai 2013

On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B(1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   On a $\overrightarrow{AB}(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\ ;\ -5\ ;\ -3)$. On a : $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-1}{-5}$.
   Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$.
   (a) Démontrons que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   On a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 1\times 2+(-1)\times(-1)+(-1)\times 3 = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{u} = 2\times 2+(-5)\times(-1)+(-3)\times 3 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à $\vec{u}$.
   La droite Δ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : elle est orthogonale au plan (ABC)

   (b) De ce qui précède, on déduit que $\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC).
   Une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $2x-y+3z+d=0$.
   Comme le point A appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient :
   $2\times 0+(4)\times(-1)+(1)\times 3+d=0 \Leftrightarrow d=1$.
   On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) : $2x-y+3z+1=0$.

   (c) Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ.
   Comme la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et contient le point D (7 ; −1 ; 4), une représentation paramétrique de Δ est :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

   (d) Déterminons les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Les coordonnées de H sont les solutions du système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ 2x-y+3z+1 &=& 0 \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ 2x-y+3z+1 &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ 2(2t+7)-(-t-1)+3(3t+4)z+1 &=& 0 \end{array}\right.$$
   $$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ t &=& -2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ y &=& 1 \\ z &=& -2 \\ t &=& -2 \end{array}\right.$$
   Le point H a pour coordonnées $H(3;\ 1;\ -2)$

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

   (a) Démontrons que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   Le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $x+y+z=0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
   Le plan $\mathscr{P}_\epsilon$ d'équation $x+4y+2=0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1\ ;\ 4\ ;\ 0)$.
   Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont pas parallèles ; ils sont sécants.

   (b) Vérifions que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique
   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t+7 \\ y & = & -t-1 \\ z & = & 3t+4 \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$

   Considérons le système :
   $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+4y+2 & = & 0 \\ y & = & y \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$
   $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+4y+2 & = & 0 \\ y & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & -x-y \\ x & = & -4t-20 \\ y & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 3t+2 \\ x & = & -4t-20 \\ y & = & t \end{array}\right.$
   On en déduit que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique
   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$

   (c) On déduit de la représentation paramétrique précédente que la droite d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}(-4\ ;\ 1\ ;\ 3)$.
   Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$.
   $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}=0$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux : la droite d et le plan (ABC) sont parallèles .

II Antilles-Guyane juin 2013

1. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
   Par l'absurde : si (IJ) et (EC) étaient coplanaires, alors, le point J appartiendrait au plan (ECI) c'est-à-dire au plan (ECA), ce qui est faux.
2. La bonne réponse est $\boxed{\text{c}}$.
   Dans le repère mentionné dans le sujet, on a $\overrightarrow{AF}(1,0,1)$ et $\overrightarrow{BG}(0,1,1)$, d'où $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}=1\times0+0\times1+1\times1=1$.
3. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$. On le vérifie en injectant les coordonnées des points A, F et H dans l'équation $x+y-z=0$.
4. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
   Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{n}(1,1,-1)$, or $\overrightarrow{EC}(1,1,-1)$. Par conséquent $\overrightarrow{EC}$ est normal à $\mathscr{P}$, et comme $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{EL}$ est de ce fait aussi normal à $\mathscr{P}$.
5. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$.
   On a $\overrightarrow{EC}(1,1,-1)$ et $E(0,0,1)$; une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & 1-t \end{array}\right.\ (t\in\mathbb{R})$.
   Le point L a donc pour coordonnées $L(t,t,1-t)$, et comme $L\in\mathscr{P}$ alors : $t+t-(1-t)=0$ d'où l'on tire $t=\dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire $L\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, d'où le résultat.