Géométrie dans l'espace : exercices de bac

I Liban mai 2014

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+3z+1=0$ et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -5+3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

On donne les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;1\ ;\ -2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t \\ z = -2+t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

Proposition 2 :

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :

La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées $(8;\ -3;\ -4)$.

Proposition 5 :

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

II Métropole, juin 2014

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).

   On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).

   (a) Donner les coordonnées des points D et F.

   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

   (d) Calculer les coordonnées du point H.

   (e) Démontrer que l'angle $\widehat{\mathrm{EHG}}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = t\overrightarrow{\mathrm{DF}}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{E}M\mathrm{G}}$.

   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

   (a) Démontrer que $M\mathrm{E}^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.

   (b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.

   En déduire que $M\mathrm{E}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

   (c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

   En déduire que α est maximale si et seulement si $M\mathrm{E}^2$ est minimal.

   (d) Conclure.