TS Feuille de révision (4)

I Pondichéry avril 2012

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère :

— les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P} : x-y-z-2=0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}' : x+y+3z=0.$$

— la droite $\mathscr{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3-2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Proposition 2
L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t' \\ y & = & -1-2t' \\ z & = & t' \end{array}\right. \qquad t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3
Les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont coplanaires.

II Amérique du Nord mai 2013

Les parties A B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.
2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

III Liban mai 2013

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	**Algorithme N° 2**	**Algorithme N° 3**
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   (c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

IV Antilles-Guyane juin 2013

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

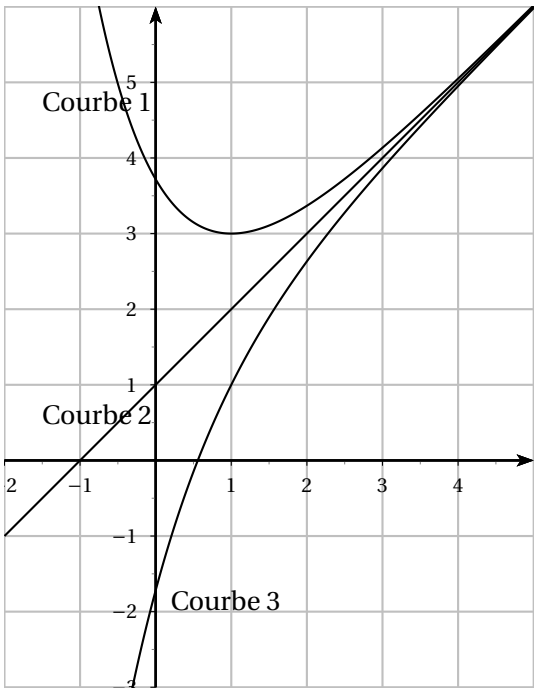
et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_\mathrm{e}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).

   Identifier chacune de ces courbes sur la figure ci-dessous.



3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation
$y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

4. (a) On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.

   (b) Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
   Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}$.
   En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

V Antilles-Guyane juin 2013

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :

   A l'évènement « l'étudiant répond A »,

   B l'évènement « l'étudiant répond B »,

   C l'évènement « l'étudiant répond C »,

   R l'évènement « l'étudiant connait la réponse »,

   $\overline{R}$ l'évènement contraire de R.

   (a) Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

   (b) Montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = \dfrac{1}{3}(1 + 2r)$.

   (c) Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

   (a) Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.

   (b) Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
   Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.
   En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.

   (c) Dans la suite, on suppose que $r = 0{,}4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

      i. Donner les paramètres de cette loi normale.

      ii. Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 250)$ à 10^{-2} près.
      On pourra s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $P(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire de la question **2. c**.