Exercices sur la forme exponentielle

I

Sans calcul, placer dans un repère orthpnormé les points A, B, C, D et E d'affixes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, $3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

II

1. Écrire sous forme exponentielle $-\sqrt{3}-3\mathrm{i}$.
2. En déduire la forme exponentielle de $-\sqrt{3}+3\mathrm{i}$ et de $\sqrt{3}+3\mathrm{i}$.

III

1. En utilisant la notation exponentielle, déterminer le module et un argument de $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ puis de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

IV

1. Démontrer que, pour tout θ, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$.
2. On rappelle que $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Calculer $\cos^3\theta$ en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et de $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
3. En déduire $\cos^3\theta$en fonction de $\cos\theta$ et de $\cos 3\theta$.

V

Quel est l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants

a) $z = 3+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$?

b) $z = -1+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [0\,;\,\pi]$?

c) $z = 4+3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \left[9\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$?