Feuille d'exercices de révision

I

Soit (u_n) la site définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 9 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^{n+1} + 3$.

II

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2} \end{cases}$

1. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n
2. Démontrer cette conjecture.

III

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto 4\sqrt{2x^2 - 8x + 14}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \longmapsto \left(3x^2 + 5x - 9\right)^7$ sur $\mathbb{R}$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{3x^2 + 5x + 3}{x^2 + 1}$

IV

On considère la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - x - 5}{x - 2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f ?
2. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$?
5. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
   Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{D}$.
6. Quelles sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec les deux axes ?
7. Étudier les variations de f ? Donner le tableau de variations ?
8. Tracer les asymptotes puis la courbe $\mathscr{C}_f$

V Antilles-Guyane septembre 2005

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. (a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant 0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant n - 2$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
   (b) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6.$$
   (c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
   (d) En déduire l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

VI Sportifs de haut niveau 1999

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On désigne par E l'ensemble des points M d'affixe z tels que z^3 soit un nombre réel positif ou nul.

1. (a) Le point A d'affixe $a = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ appartient-il à E ?
   (b) On note B le point d'affixe $b = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Calculer un argument de b et montrer que B appartient à E.
2. On suppose $z \neq 0$ et on note θ un argument de z. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z^3 soit un nombre réel positif.
3. Après avoir vérifié que le point O appartient à E, déduire des résultats précédents que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera. Placer les points A et B et représenter E sur une figure.

4. À tout point P d'affixe $z \neq 0$, on associe les points Q d'affixe $\mathrm{i}z$ et R d'affixe z^4. On note F l'ensemble des points P tels que l'angle $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR})$ ait pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que F est l'ensemble E privé du point O.

VII Polynésie juin 2000

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes$\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2, associe

$$Z = f(z) = \frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}.$$

1. Si $z = x+\mathrm{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

   On vérifiera que $\Re(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.

   En déduire la nature de :

   (a) l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;

   (b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.

   (c) Représenter ces deux ensembles.

2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2-\mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$. En remarquant que $Z = \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

3. Calculer $|f(z)-1| \times |z+2\mathrm{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.