Exercice sur les nombres complexes

I

1. Quelle est la partie réelle du nombre complexe $z = (2+\mathrm{i})^2$?
2. Quelle est la partie imaginaire du nombre complexe $z = (1-\mathrm{i})^2$?
3. Calculer le module du nombre complexe $z = 4+3\mathrm{i}$.
4. Calculer un argument du nombre complexe $z = 2-2\mathrm{i}$.
5. Si $z = 2-5\mathrm{i}$ alors que vaut $\overline{z}$?
6. Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. Donner la forme algébrique de z.

II Amérique du sud novembre 2009

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}.$$

1. (a) Déterminer l'affixe du point P$'$ image par f du point P d'affixe $(1+\mathrm{i})$.
   (b) Montrer que les droites (AP) et (BP$'$) sont parallèles.
   (c) Établir que les droites (AP) et (PP$'$) sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $M' = M$).

   On cherche à généraliser les propriétés **1.b** et **1.c** pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z-2)\left(\overline{z}-2\right)$ est réel.
   (b) En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.
   (c) Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question **1.c**.
5. Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2\mathrm{i}$.

Correction du II

Amérique du sud novembre 2009

1. a. $z_{P'} = \dfrac{\overline{1+i}(1+i-2)}{\overline{1+i}-2} = \dfrac{(1-i)(-1+i)}{-1-i} = \dfrac{(1-i)(1-i)}{1+i} = \dfrac{-2i}{1+i} = \dfrac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-2-2i}{2} = -1-i.$

Donc $z_{P'} = -z_P$.

b. $\overrightarrow{AP}(-1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{BP'}(-1\,;\,1)$. Les vecteurs sont égaux donc les droites (AP) et (BP′) sont parallèles.

On peut même dire que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP'} \iff$ (APP′B) est un parallélogramme.

c. $\overrightarrow{AP}(-1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{PP'}(-2\,;\,-2)$. Donc $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PP'} = (-1)\times(-2)+1\times(-2) = 0 \iff \overrightarrow{AP}(-1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{PP'}$ sont orthogonaux ou encore les droites (AP) et (PP′) sont perpendiculaires.

2. Pour $M(z)$ avec $z \neq 2$, donc avec $\overline{z} \neq$ Ď2, $M'(z') = M(z) \iff z' = \dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} = z \iff \overline{z}(z-2) = z\left(\overline{z}-2\right) \iff$ $z\overline{z}-2\overline{z} = z\overline{z}-2z \iff -2\overline{z} = -2z \iff \overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des points invariants par f est l'axe des abscisses privé du point A.

3. a. $(z-2)\left(\overline{z}-2\right) = (z-2)\left(\overline{z}-\overline{2}\right) = (z-2)\overline{(z-2)} = |z-2|^2 \in \mathbb{R}^+$ (carré du module de $z-2$, soit AM^2.)

b. $\dfrac{z'+2}{z-2} = \dfrac{\dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}+2}{z-2} = \dfrac{\dfrac{\overline{z}(z-2)+2\left(\overline{z}-2\right)}{\overline{z}-2}}{z-2} = \dfrac{z\overline{z}-2\overline{z}+2\overline{z}-4}{(z-2)\left(\overline{z}-2\right)} = \dfrac{z\overline{z}-4}{(z-2)\left(\overline{z}-2\right)}.$

Or $z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ et dans la question précédente on a vu que $(z-2)\left(\overline{z}-2\right) = |z-2|^2 \in \mathbb{R}$.

Le dernier quotient est donc réel.

c. Le dernier résultat peut s'écrire $\dfrac{z'-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R} \iff \left(\overrightarrow{AM},\,\overrightarrow{BM'}\right) = 0 + k\pi$ (argument d'un réel).

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires donc les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

4. On a $z_{\overrightarrow{AM}} = x-2+iy$ et $z_{\overrightarrow{MM'}} = z'-z = \dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} - z = \dfrac{\overline{z}(z-2)-z\left(\overline{z}-2\right)}{\overline{z}-2} = \dfrac{z\overline{z}-2\overline{z}-z\overline{z}+2z}{\overline{z}-2} = \dfrac{2\left(z-\overline{z}\right)}{\overline{z}-2} =$ $\dfrac{2(x+iy-x+iy}{x-iy-2} = \dfrac{4iy}{(x-2)-iy} = \dfrac{4iy[(x-2)+iy]}{(x-2)^2+y^2} = \dfrac{-4y^2}{(x-2)^2+y^2} + i\dfrac{4y(x-2)}{(x-2)^2+y^2}.$

Calculons $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MM'} = \dfrac{-4y^2(x-2)}{(x-2)^2+y^2} + \dfrac{4y^2(x-2)}{(x-2)^2+y^2} = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux, donc les droites (AM) et (MM') sont perpendiculaires.

5. La construction de l'image de M se déduit des questions précédentes :

- Tracer la parallèle (d_1) à (AM) contenant B ;
- Tracer la perpendiculaire (d_2) à la droite (AM) contenant M
- L'intersection de (d_1) et (d_2) est le point M'.