Exercices de bac sur la loi normale

I Pondichéry avril 2013

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

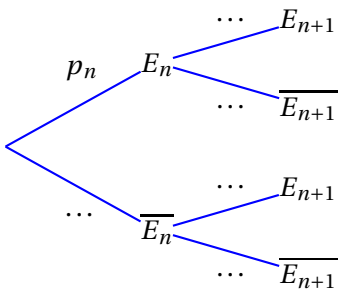
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbrede probabilité.

   (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
   $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par
   $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

   (d) En déduire la limite de la suite (p_n).

   (e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur J +1 Fin tant que
Sortie	Afficher J

   À quoi correspond l'affichage final J ?

   Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

   On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

   On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

   (b) On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$
   par la loi normale centrée réduite c'est-à -dire de paramètres 0 et 1.

   On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

   Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500

x	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	
$P(Z < x)$	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939	

   Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

II Liban mai 2013

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »
C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.

   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

   Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

   (a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

   (b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].

   (c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

   On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993