TS - probabilités conditionnelles- exercices de bac (1)

I Asie juin 2010

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

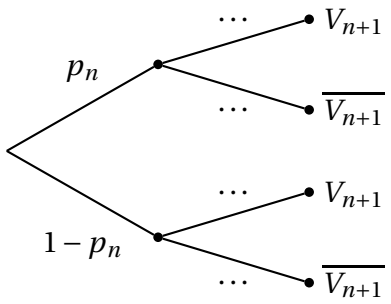
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;
   (b) B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.
3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
   (a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

II Asie juin 2009

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussette auprès de trois fournisseurs $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathscr{F}_3$.

Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussette fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussette ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

   On considère les évènements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

   - F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ » ;
   - F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ » ;
   - F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ » ;
   - D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

   (a) Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
   Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cet expérience.
   (b) Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.
   (d) En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.
   (e) Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?
2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
   On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de

chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.

(a) Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.

(b) Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

III Polynésie septembre 2007

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :
40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.
On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaÓt et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaÓt et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaÓt et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'èvénement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'èvénement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n°0$) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

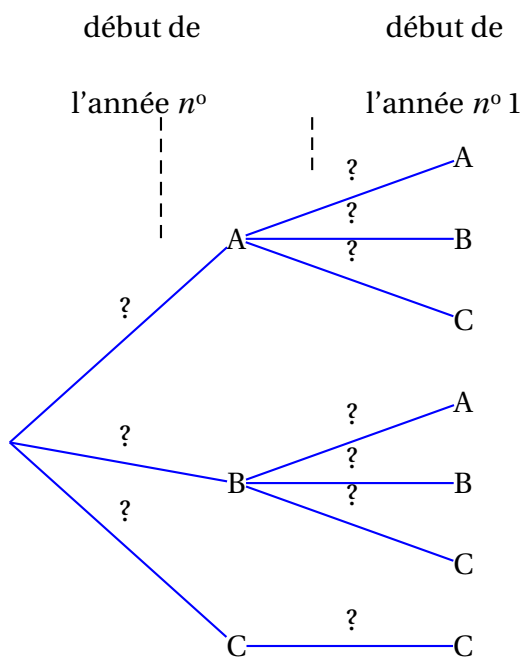
1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaÁant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.
2. (a) Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} p_{n+1} &= 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} &= 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

   (a) Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

   (b) Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

   (c) En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter le résultat.