Exercices de baccalauréat sur la loi binomiale

I Métropole juin 2012

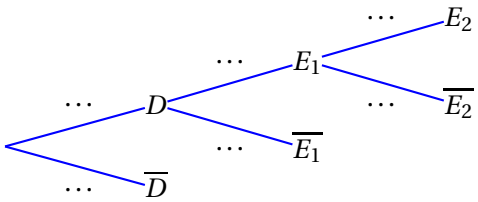
Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

   On considère les événements suivants :

   — D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   — E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   — E_2 : « Le candidat est recruté ».

   (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Calculer la probabilité de l'événement E_1.

   (c) On note F l'événement « Le candidat n'est pas recruté ».

   Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramétres de cette loi.

   (b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

II Asie juin 2012

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la régle de jeu suivante :

— un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
— un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
— un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.

   Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

   On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

   (a) Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramétres n et p.

   (b) Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au milliéme.

   (c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. (a) Justifier l'égalité : $p(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

   (b) ...crire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k

2. On note $\mathrm{E}(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k

   On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathrm{E}(Y_k)$ est strictement positive.

   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.