TS1-TS2 : corrigé du contrôle commun n° 4 (4 heures)

I Centres étrangers juin 2013

Partie A - Algorithmique et conjectures

1. Les deux lignes à compléter sont :
   - Affecter à u la valeur $\dfrac{n\times u+1}{2(n+1)}$
   - Affecter à n la valeur $n+1$.
2. Il faut rajouter avant le Fin Tant que : « **Afficher la variable u** ».
3. La suite (u_n) semble être décroissante vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = (n+1)\times\dfrac{n\times u_n+1}{2(n+1)} - 1 = \dfrac{n\times u_n+1}{2} - \dfrac{2}{2} = \dfrac{n\times u_n-1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}v_n}$.

   Cette relation montre que la suite (v_n) est **géométrique** de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme :

   $v_0 = 1\times u_1 - 1 = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.
2. On a donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0;5^n$.

   Or $v_n = nu_n - 1 \iff u_n = \dfrac{v_n+1}{n} = \boxed{\dfrac{1+0,5^n}{n}}$.
3. Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, on a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+(0,5)^{n+1}}{n+1} - \dfrac{1+(0,5)^n}{n} = \dfrac{n+n\times 0,5^{n+1}-(n+1)-(n+1)\times 0,5^n}{n(n+1)} = \dfrac{-1+0,5n\times 0,5^n-(n+1)\times 0,5^n}{n(n+1)}$

   $= \dfrac{-1+0,5^n(0,5n-n-1)}{n(n+1)} = \dfrac{-1+0,5^n(-0,5n-1)}{n(n+1)} = \boxed{-\dfrac{1+(1+0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}}$.

   Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
   $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est **décroissante** (vers zéro).

Partie C - Retour à l'algorithmique

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geqslant 0,001$ Affecter à u la valeur $\dfrac{n\times u+1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable n

II Polynésie septembre 2011

1. Sur 300 personnes, 225 utilisent l'escalier ; $p\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = \dfrac{225}{300} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$. D'où

   $p(\mathrm{E}) = 1 - p\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

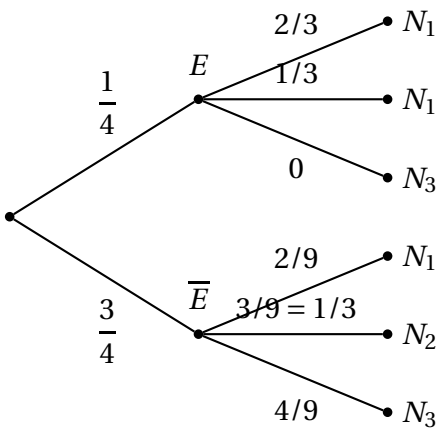
   Sur les 225 personnes empruntant l'ascenseur la répartition 50, 75, 100 suivant les étages conduit à :

   $p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_1) = \dfrac{50}{225} = \dfrac{2}{9}$; $p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_2) = \dfrac{75}{225} = \dfrac{3}{9}$

   $p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_3) = \dfrac{100}{225} = \dfrac{4}{9}$

   Sur les 75 personnes empruntant l'escalier, on obtient de même :

   $$p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_1) = \frac{1}{3}, \quad p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_2) = \frac{2}{3}, \quad p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_3) = \frac{0}{3}$$



2. (a) On a $p(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}_2) = p(\mathrm{E}) \times p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{1}{12}}$.

   (b) On applique les formules des probabilités totales :

   - $p(N_1) = p_E(N_1) \times p(E) + p_{\overline{E}}(N_1) \times p\left(\overline{E}\right)$
     $= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$
   - $p(N_2) = p_E(N_2) \times p(E) + p_{\overline{E}}(N_2) \times p\left(\overline{E}\right)$
     $= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$
   - $p(N_3) = p_E(N_3) \times p(E) + p_{\overline{E}}(N_3) \times p\left(\overline{E}\right)$
     $= \dfrac{1}{4} \times 0 + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{9} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

   Les évènements N_1, N_2, N_3 sont bien **équiprobables**.

   (c) Il faut trouver : $p_{\mathrm{N}_2}(\mathrm{E}) = \dfrac{p(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}_2)}{p(\mathrm{N}_2)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}$
   $= \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

3. (a) Une personne prise au hasard a une probabilité d'aller au 2e étage égale à

   $p(\mathrm{N}_2) = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

   Les réponses des 20 étant **indépendantes** les unes des autres, la variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres $p = \dfrac{1}{3}$ et $n = 20$.

   (b) On a donc :

   $$p(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{20-5} = \boxed{15\,504 \times \frac{2^{15}}{3^{20}} \approx}$$

   (c) La moyenne pour les 20 personnes d'aller au 2e étage est égale à **l'espérance** mathématique de la variable aléatoire X, soit : $\boxed{\mathrm{E}(X) = n \times p = 20 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{20}{3} \approx 7}$.

   Un peu moins de 7 personnes sur 20 vont au 2e étage.

4. On reprend la variable aléatoire suivant la loi binomiale de probabilité $\dfrac{1}{3}$ avec n personnes.

   Il faut trouver : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$ soit $p(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   La condition est réalisée si :

   $$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}01 \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \iff \ln 0{,}01 \geqslant n \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

   (par croissance de la fonction ln) $\iff \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{2}{3}} \leqslant n$

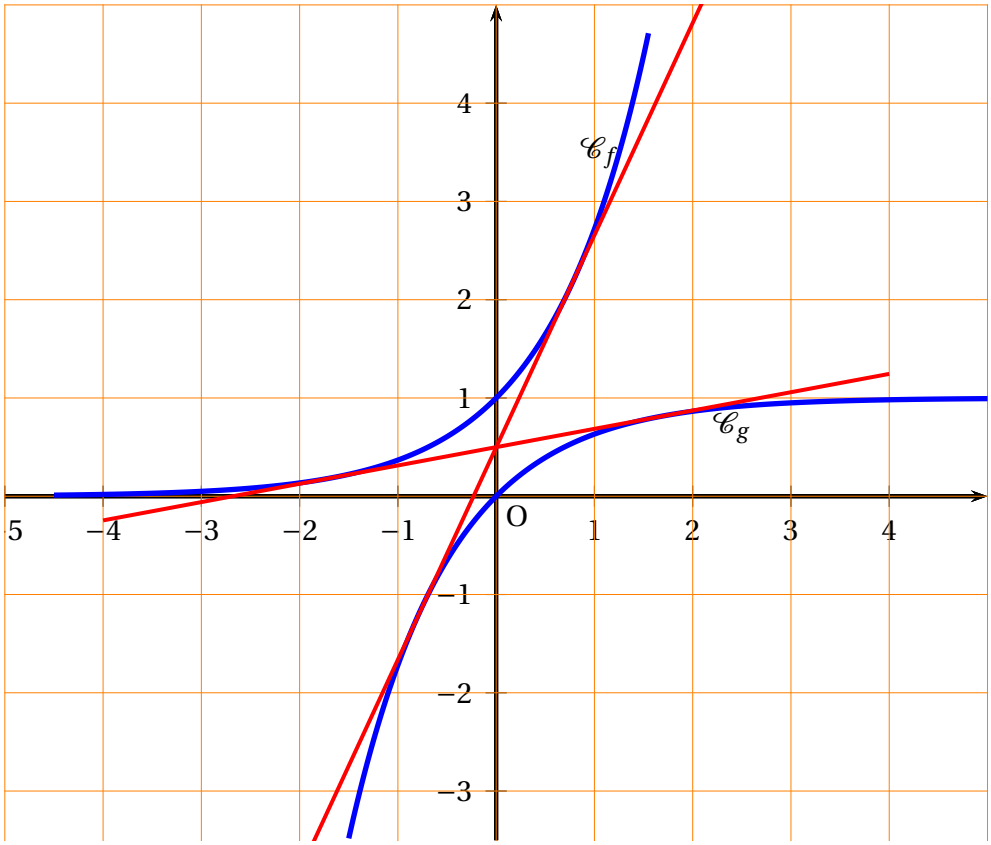
   Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{2}{3}} \approx 11{,}3$. Il faut donc prendre $\boxed{n \text{ au minimum égal à } 12}$.

   Conclusion : sur 12 personnes, au moins une va au niveau 2 avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99.

III Asie juin 2013

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Partie A



Partie B

1. (a) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est égal à $f'(a)$. Or $f'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $\boxed{f'(a) = \mathrm{e}^a}$.

   (b) De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B est égal à $g'(b)$. Or $g'(x) = -\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$, donc $g'(b) = \boxed{\mathrm{e}^{-b}}$.

   (c) Si les deux tangentes sont égales, les coefficients directeur de leurs équations réduites sont égaux, donc :
   $f'(a) = g'(b) \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-b}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien : $a = -b \iff \boxed{b = -a}$.

2. Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est égale à :
   $y - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x - a) \iff \boxed{y = x\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(1 - a)}$.
   Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B est égale à :
   $y - \left(1 - \mathrm{e}^{-b}\right) = \mathrm{e}^{-b}(x - b) \iff \boxed{y = x\mathrm{e}^{-b} + 1 - \mathrm{e}^{-b} - b\mathrm{e}^{-b}}$.
   En remplaçant $-b$ par a :
   $y = x\mathrm{e}^a + 1 - \mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a \iff \boxed{y = x\mathrm{e}^a + 1 + \mathrm{e}^a(a - 1)}$.
   Si les deux tangentes sont égales, leurs équations réduites sont les mêmes. On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs. Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :
   $\mathrm{e}^a(1 - a) = 1 + \mathrm{e}^a(a - 1) \iff \mathrm{e}^a(2 - 2a) = 1 \iff 2(a - 1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$.
   Donc a est solution de l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{2(x-1)\mathrm{e}^x+1=0}.$$

Partie C

1. (a) Sur $\mathbb{R}$, $\varphi(x)=2x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1$.

   On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=0$, d'où par somme de limites :

   $\lim\limits_{xto-\infty}\varphi(x)=1$.

   La droite d'équation $y=1$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de φ.

   On a $\lim\limits_{xto+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\boxed{+\infty}$.

   (b) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une Somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$:

   $\varphi'(x)=2\mathrm{e}^x+2(x-1)\mathrm{e}^x=\boxed{2x\mathrm{e}^x}$.

   Comme, quel que soit $x\in\mathbb{R}$; $\mathrm{e}^x>0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x. Donc sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $\varphi'(x)<0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle et sur $]0\ ;\ +\infty[$, $\varphi'(x)>0$: la fonction φ est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

   (c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) Sur $]-\infty\ ;\ 0]$ la fonction φ est continue et décroissante à valeurs dans $[-1\ ;\ 1]$. Comme $0\in[-1\ ;\ 1]$ il existe un réel unique α de $]-\infty\ ;\ 0]$ tel que $\boxed{f(\alpha)=0}$ (théorème des valeurs intermédiaires).

   Le même raisonnement sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ montre qu'il existe un réel unique de cet intervalle β tel que $\boxed{f(\beta)=0}$.

   Donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet exactement **deux** solutions dans $\mathbb{R}$.

   (b) La calculatrice donne successivement :

   $\varphi(-2)\approx 0,18$ et $\varphi(-1)\approx -0,47$, donc $-2<\alpha<-1$;

   $\varphi(-1,7)\approx 0,013$ et $\varphi(-1,6)\approx -0,05$, donc $-1,7<\alpha<-1,6$;

   $\varphi(-1,68)\approx 0,001$ et $\varphi(-1,67)\approx -0,005$, donc $-1,68<\alpha<-1,67$;

   Conclusion : $\boxed{\alpha\approx-1,68}$ au centième près.

   De la même façon on obtient $\boxed{\beta\approx 0,77}$.

Partie D

1. On sait que E appartient à la droite (EF) et à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$. $\mathrm{E}\left(\alpha\ ;\ \mathrm{e}^{\alpha}\right)$ et $\mathrm{F}\left(-\alpha\ ;\ 1-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)$.

   L'équation de la tangente en E à la courbe $\mathscr{C}_f$ est : $\boxed{y-\mathrm{e}^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha}(x-\alpha)}$.

   F appartient à cette tangente si et seulement si : $1-\mathrm{e}^{-\alpha}-\mathrm{e}^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha}(-\alpha-\alpha)\iff 1-2\mathrm{e}^{-\alpha}=-2\mathrm{e}^{\alpha}\iff 2(\alpha-1)\mathrm{e}^{\alpha}+1=0$ ce qui a été démontré à la question 2. b. de la partie C.

   Conclusion : la droite (EF) est bien la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse α.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$ est $\mathrm{e}^{-(-\alpha)}=\mathrm{e}^{\alpha}$.

   On a vu dans la question précédente que la droite (EF) a pour coefficient directeur e^{α} et contient le point F.

   Conclusion la droite (EF) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.

III (spécialité)

Partie A

On pose $M_p = 2^p - 1$.

1. $M_2 = \boxed{3}$; $M_3 = \boxed{7}$; $M_5 = \boxed{31}$; $M_7 = \boxed{127}$.
2. Pour savoir si $M_7 = 127$ est premier, on le divise par les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{127}$, donc inférieurs ou égaux à 11.
   2, 3, 5, 7 et 11 ne divisent pas M_7, donc M_7 est premier.
3. On considère M_n avec n naturel entier non premier.
   (a) Pour $x \in \mathbb{N}^*$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \boxed{\dfrac{x^n - 1}{x - 1}}$ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)
   (b) Puisque x est entier, $1 + x = \cdots + x^{n-1}$ est un entier, donc $x - 1$ **divise** $x^n - 1$.
   (c) n n'est pas premier, donc n possède un diviseur propre.
   $M_n = 2^n - 1 = 2^{d \times \frac{n}{d}} - 1 = \boxed{\left(2^d\right)^{\frac{n}{d}} - 1}$.
   En posant $x = 2^d$, le résultat précédent montre que M_n est divisible par $x - 1$, c'est-à-dire par $2^d - 1$.
4. Si n est non premier, alors M_n n'est pas premier, puisque divisible par $2^d - 1$, où d est un diviseur de n.
   La contraposée de cette implication est Si M_n premier, alors n est premier.
   Une condition **nécessaire** pour que M_n soit premier est que $\boxed{n \text{ soit premier}}$.
5. $M_1 1 = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$, donc M_{11} n'est pas premier, bien que 11 le soit.
   La condition précédente (n premier) n'est donc **pas suffisante**.

Partie B

1. $M_{13} = 8\,191$; pour savoir si ce nombre est premier, on regarde s'il est divisible par un nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{8\,191}$, c'est-à-dire à 90.
   D'après la propriété admise, un diviseur éventuel est premier et de la forme $\boxed{2\alpha p + 1}$ avec $p = 13$, donc de la forme $26\alpha + 1$.
   - Pour $\alpha = 1$, $26\alpha + 1 = 26$ non premier
   - Pour $\alpha = 2$, $26\alpha + 1 = 53 \leqslant 90$ premier.
   - Pour $\alpha = 3$, $26\alpha + 1 = 79 \leqslant 90$ premier.
   - Pour $\alpha \geqslant 3$, $26\alpha + 2 > 90$
2. Il suffit donc de voir si 8 191 est divisible par 53 ou 79 ; ce n'est pas le cas, donc M_{13} est **premier**.
3. M_{11} n'est pas premier (voir partie A 5.).
   On peut le vérifier en utilisant le résultat de la partie B.
   Un diviseur éventuel de $M_{11} = 2\,047$ est un nombre premier de la forme $2 \times \alpha \times 11 + 1$, donc $22\alpha + 1$ et inférieur ou égal à $\sqrt{2\,047}$, c'est-à-dire inférieur ou égal à 45.
   On trouve 23.
   On retrouve $M_{11} = 2\,047 = 23 \times 89$ donc M_{11} n'est **pas premier**.

IV Centres étrangers juin 2013

Partie A

1. (a) Une primate de g est $G : x \mapsto x - \mathrm{e}^{-x}$.

   Donc $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^a = \left[x - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^a = a - \mathrm{e}^{-a} - \left(0 - \mathrm{e}^{-0}\right) = \boxed{a + 1 - \mathrm{e}^{-a}}$.

   (b) $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_a^1 = \left[x - \mathrm{e}^{-x}\right]_a^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1} - \left(a - \mathrm{e}^{-a}\right) = \boxed{1 - a + \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-1}}$.

2. (a) f est dérivable sur sur $[0\,;\,1]$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle :

   $\boxed{f'(x) = 2 + 2\mathrm{e}^{-x}}$

   Les deux termes de cette somme sont positifs, donc sur $[0\,;\,1]$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est **croissante** sur $[0\,;\,1]$ de $f(0) = -2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ à $f(1) = 2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. D'où le tableau de variation :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

   (b) Sur $[0\,;\,1]$, f croît de $f(0) \approx -1,6$ à $f(1) \approx 1,6$. Comme elle est croissante et continue elle s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ pour un réel α tel que $f(\alpha) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction monotone).

   La calculatrice permet de trouver que :

   $0,4 < \alpha < 0,5$, puis $0,45 < \alpha < 0,46$ et enfin $0,452 < \alpha < 0,453$.

   Donc $\boxed{\alpha \approx 0,45}$ au centième près.

3. On a :

   $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff a + 1 - \mathrm{e}^{-a} = 1 - a + \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-1} \iff 2a - \mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-1} = 0$, ce qui signifie que a est une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\,;\,1]$.

   On a vu que cette solution est égale à α.

   Finalement les aires sont égales pour $\boxed{a = \alpha \approx 0,45}$.

Partie B

1. On a $g(0) = 1 + 1 = 2$. Il est donc évident que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est inférieure à $2 \times 1 = 2$.

   Comme $g(1) = 1 + \mathrm{e}^{-1} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, si $b \geqslant 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, chacune des deux aires serait supérieure à 1 ce qui est impossible.

   Donc $\boxed{b < 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}}$.

2. L'aire du domaine du bas est égale à $b \times 1 = \boxed{b}$ qui est égale à la demi-aire de $\mathscr{D}$.

   On a donc :

   $b = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}[G(x)]_0^1 = \dfrac{1}{2}\left[x - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1$
   $= \dfrac{1}{2}\left[1 - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{0}\right]$.

   Finalement $b = \dfrac{1}{2}\left(2 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \boxed{1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \approx 0,816}$.