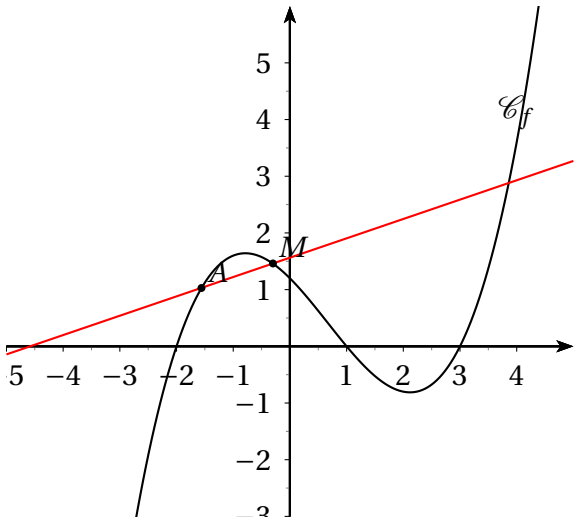
# Fonctions numériques : dérivation

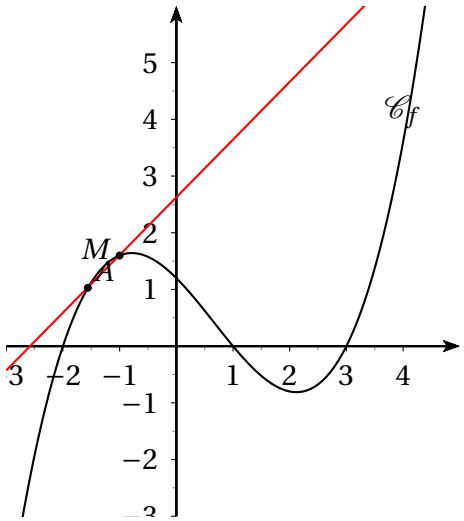
## Table des matières

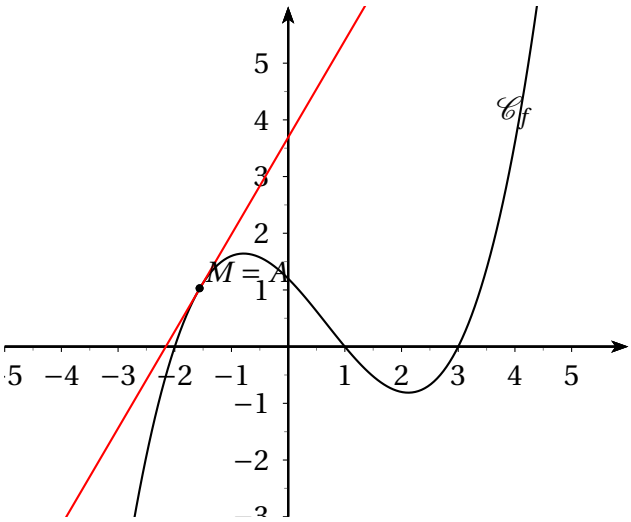

I Notion de tangente à une courbe . . . 1
II Nombre dérivé de $f$ en $a$ et fonction dérivée : . . . 2
III Tableau des dérivées usuelles : . . . 4
IV Dérivées et opérations : . . . 4
V Dérivée de la composée de quelques fonctions : . . . 5
V.1 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ . . . 5
V.2 Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$ . . . 6
V.3 Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ . . . 7
V.4 Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$ . . . 7
V.5 Dérivée de $f \circ g$ . . . 7
VI Application de la dérivabilité : . . . 7
VI.1 Utilisation du nombre dérivé pour le calcul de certaines limites : . . . 7
VI.2 Sens de variation d'une fonction : . . . 8
VII Rappels sur les fonctions cosinus et sinus : . . . 8
VII.1 Radian . . . 8
VII.2 Cosinus et sinus d'un angle $x$ . . . 9
VII.3 Dérivée de $\cos(u)$ et de $\sin(u)$ . . . 10
VII.4 Cercle trigonométrique . . . 11


## I Notion de tangente à une courbe

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et soit $A$ un point fixe de $\mathscr{C}_f$. Soit $M$ un point variable de $\mathscr{C}_f$. On trace la droite $(AM)$ qui est sécante à $\mathscr{C}_f$. On fait tendre $M$ vers $A$. Si, lorsque $M$ tend vers $A$, la sécante admet une position limite, on dit que cette limite est tangente à $\mathscr{C}_f$.






## II Nombre dérivé de $f$ en $a$ et fonction dérivée :

### Définition

Notons $a$ l'abscisse de $A$ et $x$ l'abscisse de $M$. Le coefficient directeur de la sécante $(AM)$ est : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Dire que la sécante a une position limite qui est la droite tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A$ signifie que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe.

Si ce nombre **existe** et s'il est **fini**, on pose : $\mathbf{f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ et ce nombre est le **nombre dérivé** de $f$ en $a$.

On dit alors que $f$ est dérivable en $a$.

### Remarque :

En posant $x = a+h$, on obtient : $\mathbf{f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.

Exemple : $f(x) = x^2$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{[a+h]^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$.

Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) = 2a$.

$f$ est dérivable en $a$ et $\boxed{f'(a) = 2a}$

Par définition, $f'(a)$ est **le coefficient directeur de la tangente** à $\mathscr{C}_f$ en $a$.

## Propriété

L'équation de la tangente est alors : $\mathbf{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$.

**Démonstration :**

Rappel : la droite, de coefficient directeur $a$ et passant par le point $M_0$ de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$ a pour équation $y-y_0 = a(x-x_0)$.

En effet, l'équation est de la forme $y = ax+b$.

Comme $M_0$ appartient à cette droite, ses coordonnées vérifient cette équation, donc $y_0 = ax_0+b$.

Par conséquent : $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & ax+b \\ y_0 & = & ax_0+b \end{array}\right.$.

Par soustraction, on obtient : $y-y_0 = a(x-x_0)$.

Pour la tangente, on obtient donc : $y-y_A = f'(a)(x-x_A)$ qui donne $y = f'(a)(x-x_A)+f(a)$.

## Définition

$f$ est dérivable sur un intervalle ouvert $I$ si $f$ est dérivable en tout $a$ de $I$.

## Remarque

La dérivée $f'$ de $f$ est elle-même une fonction. Si elle est dérivable, on appelle $f''$ sa dérivée (dérivée seconde de $f$).

Cette dérivée seconde peut elle-même être dérivable et ainsi de suite. Les dérivées d'ordre $n$, avec $n \geqslant 3$, se notent $f^{(n)}$.

Ainsi : $f'' = (f')'$ ; $f^{(3)} = (f'')'$ et plus généralement $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$

**Exemples :**

1. Soit $f(x) = 3x^4+5x^2+2x+1$.
   On a : $f'(x) = 12x^3+10x+2$ ; $f''(x) = 36x^2+10$ ; $f^{(3)}(x) = 72x$ : $f^{(4)}(x) = 72$ ; $f^{(5)}(x) = 0$ et les dérivées suivantes sont toutes égales à la fonction nulle.
2. Soit $f(x) = \sin x$.
   Alors : $f'(x) = \cos x$ ; $f''(x) = -\sin x$ ; $f^{(3)}(x) = -\cos x$ ; $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$. On retombe sur la fonction initiale.
3. Imaginons qu'il existe une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, $f'(x) = f(x)$. $f$ est-elle dérivable à l'ordre 3 si oui, que vaut $f^{(3)}$ ?
   Réponse : $f' = f$ donc $f'$ est dérivable et $f'' = (f')' = f'$ et de même $f^{(3)} = f$.
   On pourrait alors montrer par récurrence, que la fonction $f$ vérifie alors : pour tout $n$, $f^{(n)} = f$.
   On étudiera cette fonction plus en détail dans un prochain chapitre.

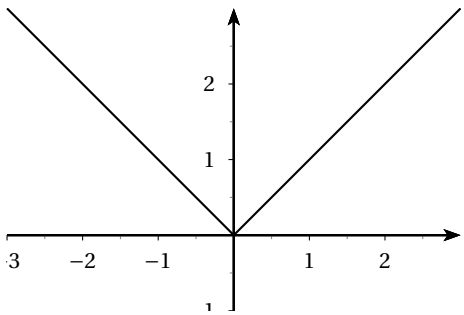
**Exercices**

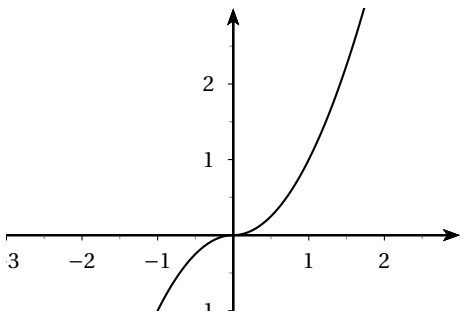
- Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- Étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x|x|$ en 0.

**Solutions :**

- Soit $f$ la fonction $x \mapsto |x|$.
  $\forall x \neq 0,\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|-0}{x-0} = \dfrac{|x|}{x}$.
  Si $x<0$, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$ et pour $x>0$, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$.
  On en déduit que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-1) = -1$, alors que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1) = 1$.
  La limite à gauche et à droite n'est pas la même, donc la limite en 0 n'existe pas ; $f$ n'est pas dérivable en 0 (mais l'est à gauche et à droite) ; on dit que la courbe admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.
- Soit $g : x \mapsto x|x|$. Cette fois, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (|x|) = 0$ ; la limite existe, donc la fonction $g$ est dérivable en 0 et la courbe représentative de $g$ a une tangente en 0.

  Voici les deux représentations graphiques de $f$ et de $g$.




## III Tableau des dérivées usuelles :

| Fonction $f$ définie par : | Fonction $f'$ définie par : | Domaine de décidabilité de validité |
|---|---|---|
| $f(x) = k \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$ | $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0\,;\,+\infty[$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \sin x$ | $f'(x) = \cos x$ | $\mathbb{R}$ |

## IV Dérivées et opérations :

Soient $u$, $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ et $k$ un réel.

- $(ku)' = ku'$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, $u(x) \neq 0$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$

**Théorème (admis)**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ et dérivable en $a \in I$ ; alors, $f$ est continue en $a$

Attention, la réciproque est fausse ; une fonction peut être continie en $a$, mais pas dérivable ; exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.

# V Dérivée de la composée de quelques fonctions :

## V.1 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

**Propriété**

Soit $u$ une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle I., de fonction dérivée $u'$.
La fonction $f$ définie sur I par $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout nombre $x$ tel que $u(x) \neq 0$ et
$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

**Démonstration :**

Démonstration :

Soit $x \in I$ tel que $u(x) > 0$. Soit J un intervalle de I contenant I.
Soit $h$ un réel non nul, tel que $x + h \in J$.
Soit $A(h) = \dfrac{\sqrt{u(x+h) - u(x)}}{h}$ et on étudie la limite quand $h$ tend vers 0.

$$A(h) = \frac{\left[\sqrt{u(x+h)} - \sqrt{u(x)}\right] \times \left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right]}{\left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right]} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h\left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right]} \text{ (avec } \sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)} > 0\text{)}.$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) = u'(x)$ ; $\lim\limits_{h \to 0} u(x+h) = u(x)$ par continuité de $u$ donc $\lim\limits_{h \to 0}\left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right] = 2\sqrt{x}$.

On en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} A(h) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ cqfd.

**Exemple :** $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$ définie sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 5x + 7$ et $u'(x) = 6x + 5$.
Alors : $\boxed{f'(x) = \dfrac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+7}}}$.

## V.2 Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$

**Propriété**

Soit $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$. Soit $u'$ sa fonction dérivée. et soit $n$ un entier relatif non nul.
La fonction $u^n$ est dérivable et $\left(u^n\right)' = nu' \times u^{n-1}$.

**Démonstration** Soit $A(h) = \dfrac{u^n(x+h) - u^n(x)}{h}$. On doit étudier la limite de $A(h)$ quad $h$ tend vers 0.
On a vu en première que la fonction $f : x \mapsto x^n$ est dérivable et que $f'(x) = nx^{n-1}$.
Cela signifie que $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}}$.
En changeant de lettre, on a : $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{(z+k)^n - z^n}{k} = nz^{n-1}$
Posons $\varepsilon(k) = \dfrac{(z+k)^n - z^n}{k} - nz^{n-1}$. On a $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(k) = 0}$.
On obtient, après transformation :
$\dfrac{(z+k)^n - z^n}{k} = nz^{n-1} + \varepsilon(k)$ donc $(z+k)^n - z^n = \left(nz^{n-1} + \varepsilon(k)\right) \times k$

On pose alors $u(x) = z$ et $u(x+h) = z+k$.
$u^n(x+h) - u^n(x) = (z+k)^n - z^n = \left(nz^{n-1} + \varepsilon(k)\right) \times k = \left(nu^{n-1}(x) + \varepsilon\left(u(x+h) - u(x)\right)\right) \times \left(u(x+h) - u(x)\right)$.
On en déduit :
$$\boxed{\frac{u^n(x+h) - u^n(x)}{h} = \left(nu^{n-1}(x) + \varepsilon\left(u(x+h) - u(x)\right)\right) \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}}$$
On a : $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) = u'(x)$ car la fonction $u$ est dérivable.
La fonction $u$ est continue, donc $\lim\limits_{h \to 0} u(x+h) = u(x)$ donc $\lim\limits_{h \to 0} [u(x+h) - u(x)] = 0$.
Alors : $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon\left(u(x+h) - u(x)\right) = \lim\limits_{k \to 0} \varepsilon(k) = 0$ en posant $k = u(x+h) - u(x)$.
Par conséquent : $\lim\limits_{h \to 0} \left(nu^{n-1}(x) + \varepsilon\left(u(x+h) - u(x)\right)\right) = nu^{n-1}(x)$.
Alors : $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{u^n(x+h) - u^n(x)}{h}\right) = nu^{n-1}(x) \times u'(x)}$.

**Exemples :**

1. Soit $f : x \mapsto \left(3x^2 + 5x - 7\right)^5$ ; $f = u^5$ avec $u(x) = \left(3x^2 + 5x - 7\right)^5$.
   On a alors $f' = \left(u^7\right)' = 7u'u^{7-1} = 7u'u6$ avec $u'(x) = 6x + 5$.
   Par conséquent : $\boxed{f'(x) = 7(6x+5)\left(3x^2 + 5x - 7\right)^6}$.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(x^2 + x + 1\right)^5}$ sur $\mathbb{R}$.
   On a $f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^{-5}$ donc $f = u^{-5}$ avec $\begin{cases} n = -5 \\ u(x) = x^2 + x + 1 \end{cases}$.
   $f' = nu'u^{n-1} = -5u'u^{-6} = -\dfrac{5u'}{u^6}$ avec $u'(x) = 2x + 1$.
   Par conséquent : $f'(x) = -\dfrac{5(2x+1)}{\left(x^2 + x + 1\right)^6}$

### V.3 Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$

**Propriété**

Soient $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux nombres $a$ et $b$.
La fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g' x \mapsto a \times f'(ax+b)$.

**Démonstration**

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h} = \frac{f(ax+b+ah)-f(x)}{h} = a \times \frac{f(ax+b+ah)-f(x)}{ah}.$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(ax+b+ah)-f(x)}{ah}\right) = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(ax+b+k)-f(ax+b)}{k} = f'(ax+b)$.

On en déduit : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \boxed{a \times f'(ax+b)}$.

**Exemple :** Soit $f : x \mapsto \cos(2x+3)$ ; $f'(x) = 2\cos'(2x+3) = \boxed{-2\sin(2x+3)}$.

### V.4 Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$

Propriété admise : si $u$ est dérivable, $\sin u$ est dérivable et $\cos u$ est dérivable.

- $(\sin u)' = u' \times \sin' u = u' \cos u$
- $(\cos u)' = u' \times \cos' u = -u' \sin u$

Exemple : soit $f(x) = \sin\left(x^2\right)$.
$f = \sin u$ avec $u(x) = x^2$.
$f' = u' \cos u$ avec $u'(x)2x$ donc $\boxed{f'(x) = 2x\cos\left(x^2\right)}$

### V.5 Dérivée de $f \circ g$

**Théorème admis**

Soit $g$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $J$ et $f$ une fonction définie et dérivable sur $J$.
Alors $f \circ g$ est dérivable et $\left(f \circ g\right)' = g' \times \left(f' \circ g\right)$.
Pour tout $x \in I$, $\left(f \circ g\right)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$.

## VI Application de la dérivabilité :

### VI.1 Utilisation du nombre dérivé pour le calcul de certaines limites :

On sait que si $f$ est dérivable en $a$, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

**Exemple :** $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

### VI.2 Sens de variation d'une fonction :

**Théorème (admis**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Si $f' = 0$ sur $I$, alors $f$ est constante sur $I$.
Si $f'$ est strictement positive sur $I$ sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs o˘ elle s'annule, alors $f$ est croissante sur $I$.
Si $f'$ est strictement négative sur $I$ sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs o˘ elle s'annule, alors $f$ est décroissante sur $I$.

**Exemple :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$.
On en déduit que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Exemple :**

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$.
2. En déduire la comparaison des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

**Solution :**

1. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2\sin x + 2x$. Pour étudier le signe de $f'(x)$, dérivons $f'$. $f''(x) = -2\cos x + 2 = 2(1 - \cos x) \geq 0$. $f'$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $f'(0) = 0$, on en déduit le signe de $f'$.
   On en déduit que $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Le minimum $f(0)$ vaut 0, donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

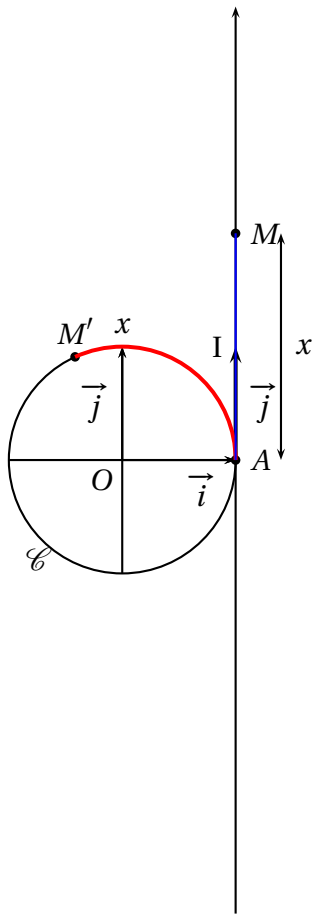
## VII Rappels sur les fonctions cosinus et sinus :

### VII.1 Radian

**Définition**

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre $O$ et de rayon 1 unité.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique, muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
Soit $A$ le point tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\mathscr{D}$ la droite tangente au cercle $\mathscr{C}$ passant par $\mathscr{D}$.
Soit I le point de la droite $\mathscr{D}$ tel que AI = 1 (I au-dessus de A).
On définit ainsi un repère sur $\mathscr{D}$.




On enroule la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$, la demi-droite supérieure s'enroulant dans le sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre, qu'on appelle aussi **sens direct** ou sens **trigonométrique**.
Soit $M$ un point quelconque de $\mathscr{D}$ ; il vient se placer après enroulement en $M'$.
La longueur du segment $[AM]$ sur $\mathscr{D}$ est alors égale à longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM'}$
Si $AM = x$, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM'}$ mesure aussi $x$ unités et l'angle au centre correspondant $\widehat{AOM}$ mesure $x$ radians.

**Définition**

1 radian est donc la mesure de l'angle au centre d'un arc de cercle de longueur 1 unité.

**Remarque** : quand on fait un tour de cercle complet de longueur $2\pi$ (périmètre du cercle), l'angle au centre correspondant mesure donc **$2\pi$ radians**.
Par conséquent, on a la correspondance : 360°= $2\pi$ radians.

| Angle en ° | 0° | 30deg | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Angle en radians | 0 rad | $\frac{\pi}{6}$ rad | $\frac{\pi}{4}$ rad | $\frac{\pi}{3}$ rad | $\frac{\pi}{2}$ rad |

**Remarques :**

- la droite $\mathscr{D}$ étant illimitée, quand on l'enroule autour du cercle, elle décrit une infinité de tours de cercle.
- Tous les points de $\mathscr{D}$ espacés d'une longueur égale à $2\pi$ se retrouvent au même endroit sur le cercle trigonométrique ; à un même point du cercle trigonométrique correspond donc une infinité d'angles, deux mesures consécutives différant de $2\pi$ radians.

### VII.2 Cosinus et sinus d'un angle $x$

Soit $M$ un point du cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ et soit $x$ une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$.

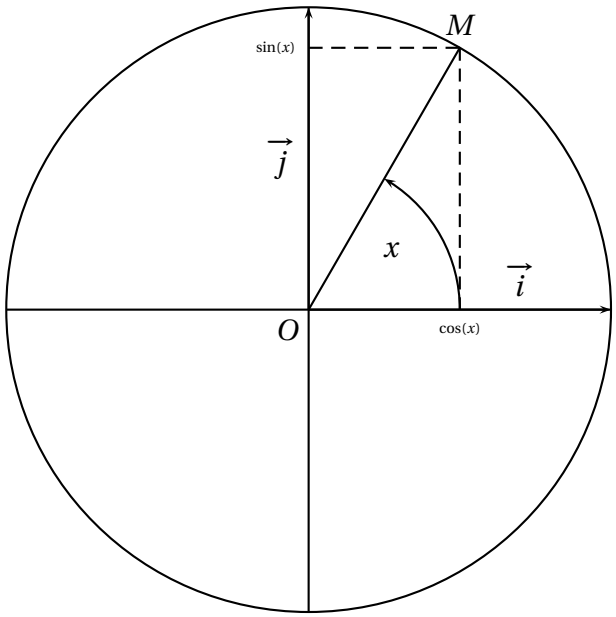
**Définition**

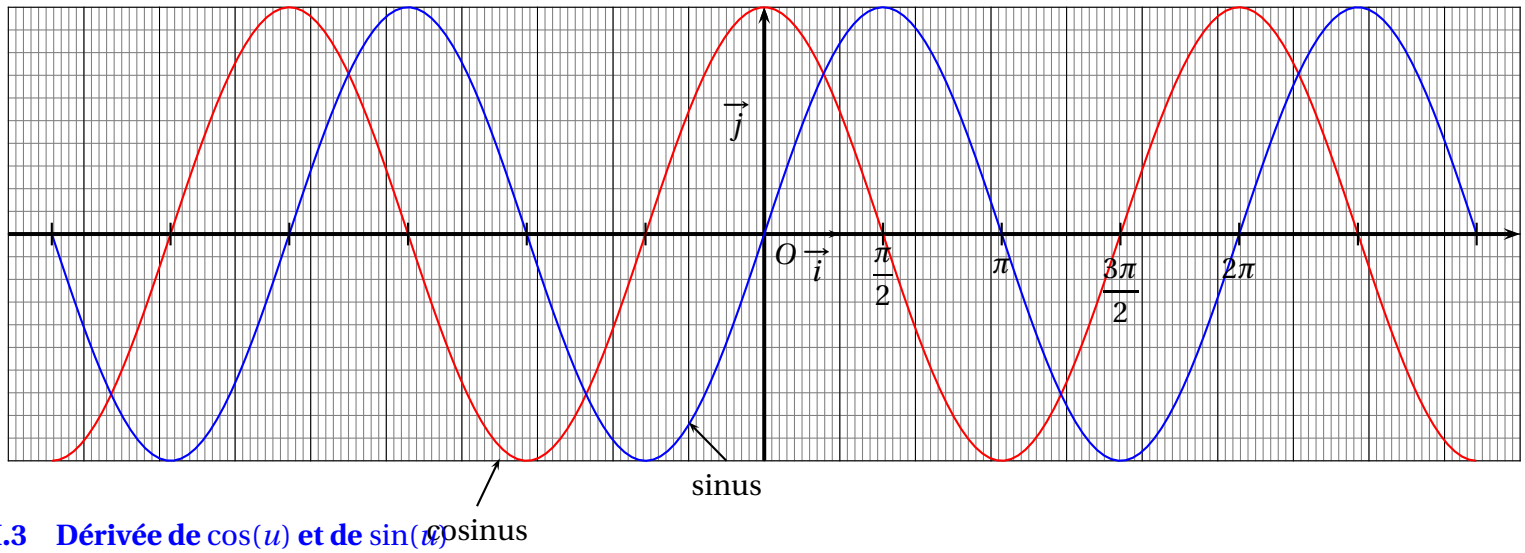
On appelle cosinus de $x$ et sinus de $x$ les coordonnées du point $M$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
On note : $M\left(\cos(x)\,;\,\sin(x)\right)$

**Remarques :**

¿ chaque point $M$ du cercle correspondent plusieurs angles ; en effet, quand on enroule la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$, des points viennent se superposer, espacés d'une longueur sur la droite de $2\pi$ ; les angles diffèrent donc de $2\pi$.
Si $x$ est une mesure de l'angle en radians, $x+2\pi$ aussi et plus généralement $x+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On écrit souvent $\cos x$ et $\sin x$ à la place de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
On a donc $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$ pour tout $x$ réel.
On dit que les fonctions cos et sin sont périodiques, de période $2\pi$.



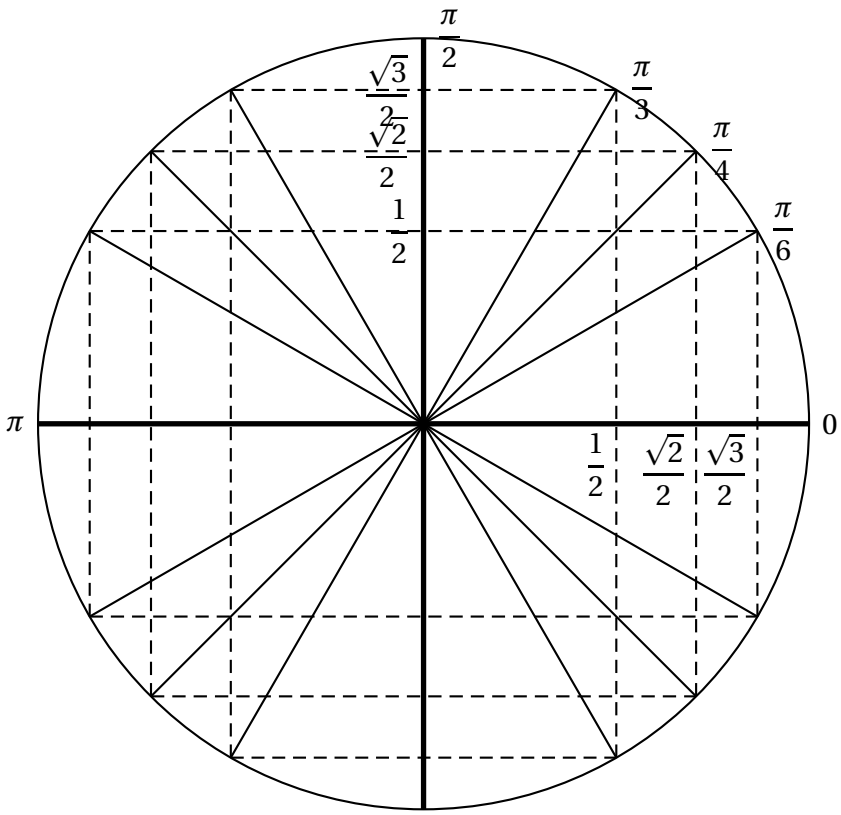




### VII.3 Dérivée de $\cos(u)$ et de $\sin(u)$

On a : $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$ et $(\sin(u))' = u'\cos(u)$.

Exemples :

1. $f(x) = \cos(2x+3)$ ; $f = \cos(u)$ avec $u(x) = 2x+3$.
   $f' = -u'\sin(u)$ avec $u'(x) = 2$ donc $f'(x) = -2\sin(2x+3)$.

2. $f(x) = \sin\left(x^2\right)$ ; $f = \sin(u)$ avec $u(x) = x^2$.
   $f' = u'\cos(u)$ avec $u'(x) = 2x$ donc $f'(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$.

## VII.4 Cercle trigonométrique