Géométrie dans l'espace

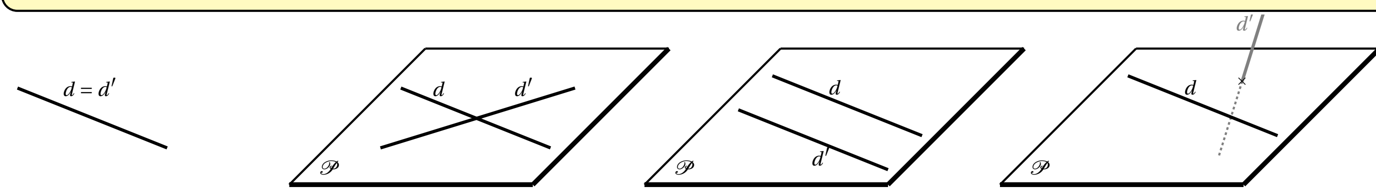
Table des matières

I Positions relatives dans l'espace

I.1 Position relative de deux droites

Propriétés

Deux droites d_1 et d_2 peuvent être coplanaires ou non coplanaires.
Si elles sont coplanaires (contenues dans le même plan), elles peuvent être sécantes en un point, strictement parallèles ou confondues. Si elles ne sont pas coplanaires, aucun plan ne contient les deux droites. (exemple : certains arêtes d'un cube)



(a) : $d = d'$ parallèles, coplanaires.

(b) : d et d' *sécantes* $d, d' \subset$ un unique plan.

(c) : d et d' *parallèles strictes* $d, d' \subset$ dans un unique plan.

(d) : d et d' non coplanaires d et d' ni sécantes, ni parallèles

I.2 Position relative de deux plans

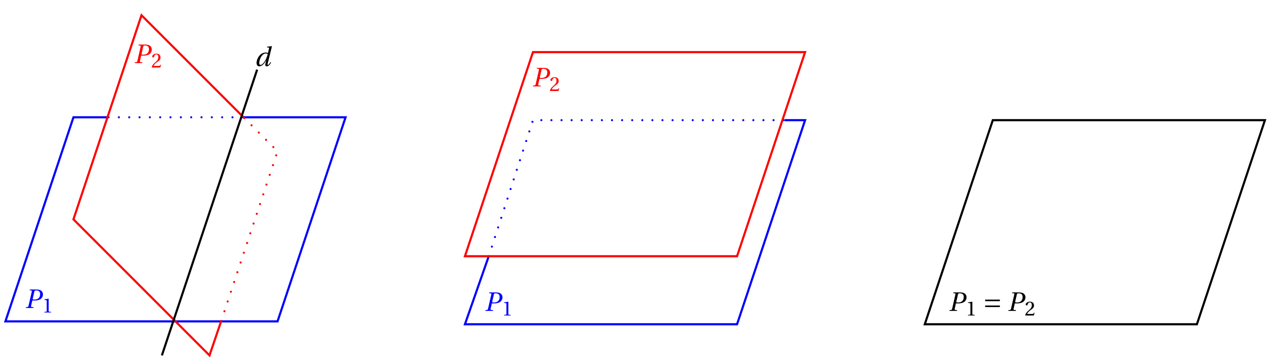
Propriétés

Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.
S'ils sont sécants, l'intersection est une droite.
S'ils sont parallèles, ils sont distincts ou confondus.

Plans sécants : une droite d'intersection

Plans strictement parallèles : aucun point d'intersection

Plans parallèles confondus : un plan d'intersection

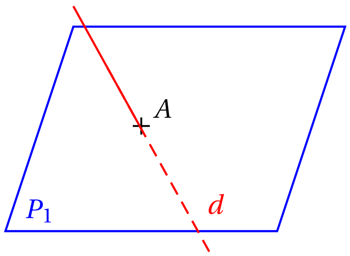


I.3 Position relative d'une droite et d'un plan

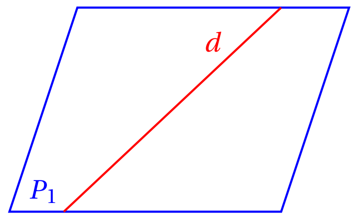
Propriétés

Une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{P}$ sont soit sécants, soit parallèles.
S'ils sont sécants, ils n'ont qu'un point commun.
S'ils sont parallèles, $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$ ou ils n'ont aucun point commun.

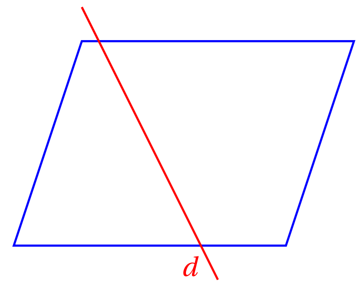
Droite et plan sécants :
un point d'intersection



Droite et plan parallèles :
droite incluse dans le plan



Droite et plan parallèles :
aucun point d'intersection



Remarques :
Pour définir un plan, il faut trois points distincts, ou une droite et un point extérieur à la droite, ou deux droites sécantes ou strictement parallèles.

II Règles d'incidence

II.1 Propriété fondamentale

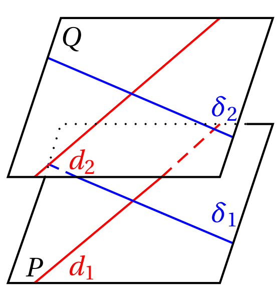
Dans un plan de l'espace, toutes les propriétés fondamentales de la géométrie plane s'appliquent.

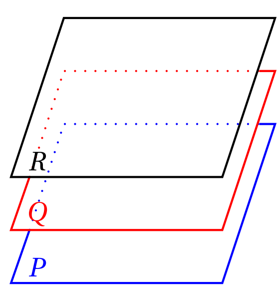
Propriétés

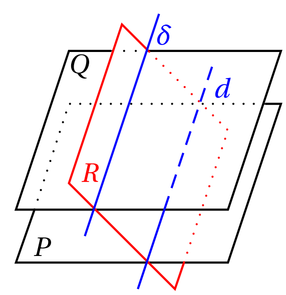
- Deux droites de l'espace sont **parallèles** si elles sont coplanaires et non sécantes,
- Deux plans de l'espace sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont pas sécants,
- Une droite et un plan de l'espace sont **parallèles** lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Propriété

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles,.
- Si deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{Q}$ alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles,
- Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles,
- Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.







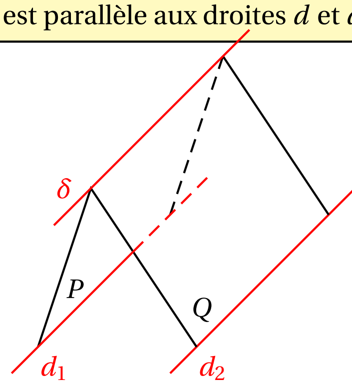
II.2 Théorème du « toit »

Théorème

Si on a :

- deux droites parallèles d et d' ;
- un plan Pcontenant d ;
- un plan Q contenant d' ;
- P et Q sécants selon une droite δ.

Alors, l'intersection δ des deux plans est parallèle aux droites d et d'.



III Orthogonalité dans l'espace

III.1 Droite perpendiculaire à un plan

Propriété

Dans un plan $\mathscr{P}$, soient deux droites d_1 et d_2 sécantes en A et une droite Δ.
On suppose que la droite Δ est perpendiculaire en A à d_1 et en A à d_2.
Alors, la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

III.2 Théorème

Théorème

Si une droite est perpendiculaire à un plan en un point A, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan qui passent par A.

IV Rappels sur le produit scalaire dans le plan

IV.1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :

Définition

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires, alors le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le nombre réel (scalaire) défini par :

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de même sens, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OB$.
- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de sens opposés, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OB$.

Remarque :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = OA^2$

Si l'un des deux vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.

Définition

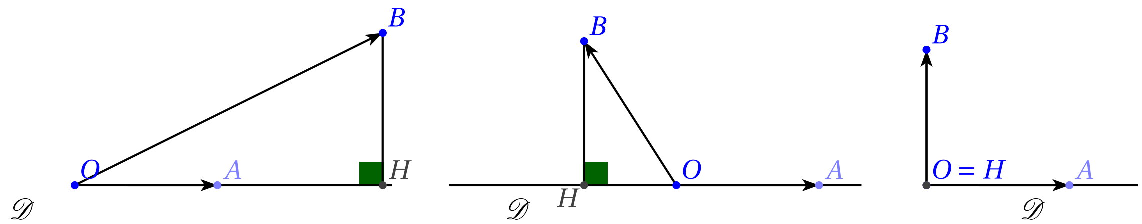
On définit le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ par : $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = OA^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$.

Exemple :
On munit une droite $\mathscr{D}$ d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\right)$. On considère les points $A(4)$, $B(7)$, $C(8)$, $D(-3)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$.

IV.2 Produit scalaire de deux vecteurs quelconques :

Définition

Le projeté orthogonal d'un point B sur une droite $\mathscr{D}$ ($B \notin \mathscr{D}$), est le point H de $\mathscr{D}$ tel que les droites $\mathscr{D}$ et (BH) soient perpendiculaires.
Si $B \in \mathscr{D}$, son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$ est lui-même.



Définition

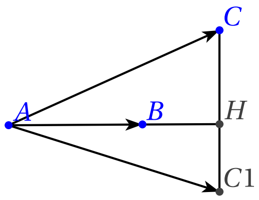
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on définit leur produit scalaire par : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

IV.3 Vecteurs orthogonaux

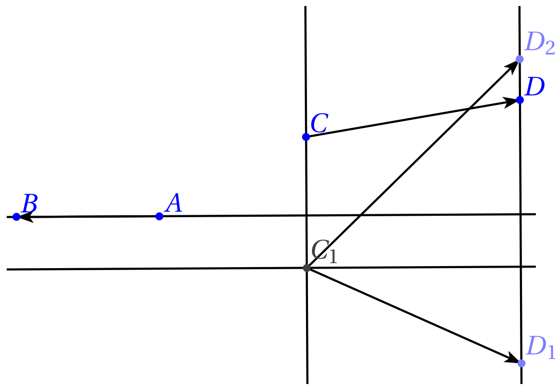
Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est nul.

Conséquences :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C_2D_2}.$$

Propriété

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \cos\left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.
- Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}}$, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

Démonstration :

- Cela vient de la définition initiale.
- $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$.
  On en déduit :
  $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right).\left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}\right) = x\overrightarrow{i} \times x\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{i} \times y'\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{j} \times x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \times y'\overrightarrow{j} = xx' + yy'$ car $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} = ||\overrightarrow{i}||^2 = 1$, $\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j} = ||\overrightarrow{j}||^2 = 1$ et $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} = 0$

IV.4 Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite .
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ si, et seulement si, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{D}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

Conséquence : soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ non nul et soit $A\left(x_1\,;\,y_A\right)$ un point.

$M(x\,;\,y)$ appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{u\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_1\\y-y_A\end{pmatrix}$.

On en déduit $a\left(y-y_A\right) - b\left(x-x_A\right) = 0$ (équation cartésienne de $\mathscr{D}$).

IV.5 Vecteur normal à une droite

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite .
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul est un vecteur normal à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{D}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Équation cartésienne d'une droite $\mathscr{D}$

Soit $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ un point et soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$

Démonstration :
Soit $M(x\,;\,y)$ un point quelconque. $M(x\,;\,y)$ appartient à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_1\\y-y_A\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$ (c.q.f.d)

V Repérage dans l'espace

Quatre points O, I, J et K définissent un repère de l'espace si et seulement si ces quatre points ne sont pas coplanaires.
Si on prend O comme origine, les vecteurs du repère sont alors $\rightarrow OI$, $\rightarrow OJ$ et $\rightarrow OK$ constituent un repère.
Pour tout point M de l'espace, il existe alors trois nombres x, y et z uniques tels que $\overrightarrow{\text{OM}}=x\overrightarrow{\text{OI}}+y\overrightarrow{\text{OJ}}+z\overrightarrow{\text{OK}}$.
Ces trois nombres sont les coordonnées de M dans ce repère. On écrit $M(x\,;\,y\,;\,z)$.
$\left(O\,;\,\boxed{OI}\,;\,\overrightarrow{\text{OJ}}\,;\,\overrightarrow{\text{OK}}\right)$ est un repère orthonormé si, et seulement si, les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux deux perpendiculaires et si $OI=OJ=OK=1$.

VI Produit scalaire dans l'espace

VI.1 Produit scalaire

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
A, B et C sont trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant ces trois points A, B et C (unique si les points ne sont pas alignés).
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathscr{P}$.

Remarque : il ne dépend pas du choix des points : en effet, dans $\mathscr{P}$, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$. Si l'on choisit trois autres points A', B' et C' tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{A'C'}$, alors :
$\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}=\dfrac{1}{2}(A'B'^2+A'C'^2-B'C'^2)=\dfrac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
Autrement dit : $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2+||\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)}$

VI.2 Différentes façons de calculer le produit scalaire

Propriétés

1. $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}||\cos(\vec{u},\vec{v})$.
2. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
3. Un repère orthonormal dans l'espace étant choisi, si $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$, alors :

   $\vec{u}.\vec{v} = aa' + bb' + cc'$.

Les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace sont les mêmes que celles de deux vecteurs du plan. En particulier : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

VI.3 Vecteur normal à un plan, équation cartésienne d'un plan

Définition

Un vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à un plan $\mathscr{P}$ si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

Propriété

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A et ayant $\vec{n}$ comme vecteur normal est : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

Réciproquement : $ax+by+cz+d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan ayant pour vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Démonstration : $M(x; y; s) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
il suffit de calculer le produit scalaire.

VI.4 Plans sécants

Propriété

Pour montrer que deux plans sont sécants, donc non parallèles, il suffit de montrer que ces deux plans ont des vecteurs normaux non colinéaires.

VI.5 Droite

Définition

Une droite est l'intersection de deux plans.
Les coordonnées d'un point d'une droite vérifient les équations de deux plans et vérifient donc un système de deux équations.
Une droite peut donc être représentée par un système de deux équations cartésiennes de plans

VI.6 Équation paramétrique d'une droite

Propriété

Soit une droite d passant par $A(x_A; y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Les coordonnées $(x; y; z)$ de tout point M de d sont de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}.$$

C'est ce qu'on appelle représentation paramétrique de d.

Réciproque : évidente

Démonstration : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, d'où $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$. on en déduit le résultat en considérant les coordonnées.