Exponentielle complexe

I Forme exponentielle des nombres complexes

Définition :

Pour tout nombre réel θ, on pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
Si z est un nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ, on appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = \rho e^{i\theta}$.

Remarque :
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. On a : $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$. La fonction f vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle, ce qui est une première justification de cette écriture sous forme exponentielle.

Propriété :

Soient $\rho e^{i\theta}$ et $\rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls, notés respectivement z et z'.

1. $zz' = \rho e^{i\theta} \times \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$
3. $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{\rho' e^{i\theta'}}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta'-\theta)}$
4. $z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$
5. $\overline{z} = \overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$

La démonstration repose sur les calculs faits avec la notation trigonométrique.

Remarque : La formule qu'Euler a fait graver sur sa tombe est

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1}$$

Remarque :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$