# TS : correction du contrôle commun n° 2 (4 heures)

## I

Soit $P_n$ la propriété : $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11, c'est-à-dire il existe un entier relatif $k_n$ tel que
$10^n - (-1)^n = 11k_n$.
Démontrons-la par récurrence :

- **Initialisation** :
  Pour $n = 0$ : $10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0 = 11 \times 0 = 11 \times k_0$ avec $k_0 = 0$.
  La propriété $P_0$ est vraie.
- **Hérédité** :On suppose $P_n$ vraie pour un entier $n$, donc
  $10^n - (-1)^n = 11k_n$ avec $k_n \in \mathbb{Z}$.
  Alors, au rang $n+1$ :
  $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 10 \times 10^n - (-1) \times (-1)^n$
  $= 10 \times 10^n + (-1)^n = 10\left(11k_n + (-1)^n\right) + (-1)^n$
  $= 11 \times 10k_n + 11 \times (-1)^n = 11\left(10k_n + (-1)^n\right) = 11k_{n+1}$ avec $k_{n+1} = 10k_n + (-1)^n \in \mathbb{Z}$.
  La propriété est héréditaire.

D'aprËs l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n$.

## II

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. Étudions la continuité de $f$ en 0.
   Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
   $= \dfrac{\left[\sqrt{x+1}-1\right]\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]} = \dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1}{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}$
   $= \dfrac{x+1-1}{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]} = \dfrac{x}{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}$
   ‘ $= \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$.
   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \boxed{\dfrac{1}{2} = f(0)}$.
   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ donc $f$ est **continue en 0**.
2. $f$ est-elle dérivable en 0 ? On étudie la limite en 0 de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.
   Pur $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2}}{x} = \dfrac{2\sqrt{x+1}-2-x}{2x^2} = \dfrac{2\sqrt{x+1}-(2+x)}{2x^2}$
   $= \dfrac{\left[2\sqrt{x+1}-(2+x)\right]\left[2\sqrt{x+1}+(2+x)\right]}{2x^2\left[2\sqrt{x+1}+(2+x)\right]}$
   $= \dfrac{4(x+1)-[2+x]^2}{2x^2\left[2\sqrt{x+1}+(2+x)\right]} = \dfrac{-x^2}{2x^2\left[2\sqrt{x+1}+(2+x)\right]}$
   $= \boxed{-\dfrac{1}{2\left[2\sqrt{x+1}+(2+x)\right]}}$.
   $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{\left[2\sqrt{x+1}+(2+x)\right]}\right) = -\dfrac{1}{8}$.
   $f$ est donc dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = -\dfrac{1}{8}}$

## III

$f_1(x) = \sqrt{3x^2+5x+9}$ sur $\mathbb{R}$.
$f_1 = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x^2+5x+9$.
$f_1' = \dfrac{u"}{1\sqrt{u}}$ avec $u'(x) = 6x+5$ donc $\boxed{f_1'(x) = \dfrac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+9}}}$

$f_2(x) = \dfrac{-3}{(2x-5)^4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$
$f_2 = -3 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = (2x-5)^4$.
Alors $f_2' = -3 \times \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -3 \times \left(-\dfrac{u'}{u^2}\right) = 3 \times \dfrac{u'}{u^2}$.
Il faut calculer $u'$ ; on a $u = v^4$ donc $u' = 4v'v^3$ avec $v(x) = 2x-5$ et $v'(x) = 2$.
Par conséquent $u'(x) = 4 \times 2 \times (2x-5)^3 = 8(2x-5)^3$.
On en déduit : $f_2'(x) = 3 \times \dfrac{8[2x-5]^3}{\left([(2x-5)^4]\right)^2} = 24 \times \dfrac{(2x-5)^3}{(2x-5)^8} = \dfrac{24}{(2x-5)^5}$.

$f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $\mathbb{R}$
$f_3 = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = \sqrt{x^2+2}$.
$f_3' = -\dfrac{u'}{u^2}$ ; $u = \sqrt{v}$ avec $v(x) = x^2$ donc $v' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$ avec $v'(x) = 2x$.
Par conséquent : $u'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.
On en déduit $f_3'(x) = -\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{\left(x^2+2\right)} = \boxed{-\dfrac{x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}}$

$f_4(x) = \sin(\sqrt{x})$ sur $]0\,;\infty[$.
$f_4 = \sin(u)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$.
Alors $f_4' = u'\cos(u)$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Par conséquent : $f_4'(x) = \boxed{\dfrac{\varrho s(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$

$f_5(x) = \sqrt{\sin(x)}$ sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$
$f_5 = \sqrt{u}$ avec $u(x) = \sin(x)$ ; $f_5' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u'(x) = \cos(x)$.

On en déduit $f_5'(x) = \boxed{\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$

$f_6(x) = \left(\dfrac{2x^2+x-5}{3x^2+x+4}\right)^5$ sur $\mathbb{R}$.

$f_6 = u^5$ avec $u(x) = \dfrac{2x^2+x-5}{3x^2+x+4}$.

$f_6' = 5u'u^4$ ; il faut donc calculer $u'(x)$.

$u = \dfrac{v}{w}$ avec $u(x) = 2x^2+x-5$ et $v(x) = 3x^2+x+4$.

On a : $u' = \dfrac{v'w - vw'}{w^2}$ d'où $u'(x) = \dfrac{(4x+1)\left(3x^2+x+4\right) - \left(2x^2+x-5\right)(6x+1)}{\left(3x^2+x+4\right)^2}$

$= \dfrac{-x^2+46x+9}{\left(3x^2+x+4\right)^2}$.

On en déduit :

$f_6'(x) = \boxed{5\left(\dfrac{-x^2+46x+9}{\left(3x^2+x+4\right)^2}\right)\left(\left(\dfrac{2x^2+x-5}{3x^2+x+4}\right)\right)^4}$

## IV

Pour tout entier naturel $n$, on considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1. $\boxed{u_1 = \dfrac{3}{4}}$ et $u_2 = \dfrac{\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{4}+4} = \dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{19}{4}} = \dfrac{18}{19}$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{18}{19}}$.

2. Soit $P_n$ la proposition « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_>0$ ».
   Efectuons une démonstration par récurrence :
   - **Initialisation** : $u_1 = \dfrac{3}{4} > 0$ donc $P_1$ est vraie.
   - **Hérédité** : on suppose $P_n$ pour un rang $n$ quelconque, donc $u_n > 0$.
     Alors $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4} > 0$ comme quotient de nombres positifs.
     La proposition est donc héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

3. (a) Pour tout $n$, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4} - 1$
   $= \dfrac{2u_n+3-u_n-4}{u_n+4} = \dfrac{u_n-1}{u_n+4}$ qui est du signe de $u_n - 1$ puisque le dénominateur $u_n+4$ est positif, $u_n$ étant toujours positif.
   On en déduit que $u_{n+1}-1$ a le signe de $u_0 - 1$ de proche en proche.

   $u_0 - 1 - 1 < 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 < 0$ (signe de $u_0 - 1$) d'où $\boxed{u_n < 1}$.

   (b) Montrons par récurrence que $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   - On a $u_0 < u_1$
   - On suppose que $u_n < un+1$ pour un entier $n$ quelconque.
     La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+4}$ est croissante car $f'(x) = \dfrac{5}{(x+4)^2} > 0$.
     Comme une fonction croissante conserve l'ordre, $f(u_n) < f(u_{n+1})$ donc $u_{n+1} < u_{n+2}$.
     La propriété est donc héréditaire.

   Daprès l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout $n$ : la suite est croissante.
   On peut aussi calculer $u_{n+1} - u_n$ qui vaut $\dfrac{(1-u_n)(u_n+3)}{u_n+4}$ qui est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) La suite $(u_n)$ est croissante majorée par 1, donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 1$.

4. Pour tout entier naturel $n$, on définit la suite $(v_n)$ par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \dfrac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \dfrac{\frac{u_n-1}{u_n+4}}{\frac{5u_n+15}{u_n+4}}$
   $= \dfrac{u_n-1}{5(u_n+3)} = \dfrac{1}{5}v_n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = \dfrac{1}{5}v_n}$.

   (b) On en déduit que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$

   (c) On en déduit $v_n = v_0 q^n$ ; $v_0 = -\dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

   (d) On a $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$ donc $u_n v_n + 3v_n = u_n - 1$ donc $u_n v_n - u_n = -3v_n - 1$ qui donne $u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1$ d'où $u_n = \dfrac{-3v_n-1}{v_n-1} = \boxed{\dfrac{3v_n+1}{1-v_n}}$.

   Comme $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

## V

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^3 - 2x^2 - 1\right)^4$.

1. Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

   (a) $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polunôme).
   Pour tout $x$, $u'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$ qui s'annule en 0 et $\dfrac{4}{3}$.
   $u'(x)$ est un polynôme du second degré qui a deux racine, qui est donc positif (du signe du coefficient de $x^2$) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
   $u(x) = x^3\left(1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{x^3}\right)$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.
   On en déduit le tableau de variation de $u$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\frac{59}{27}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

D'après le tableau de variation de $u$, $u(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;\,\frac{4}{3}\right]$.

Sur $[0\,;\,+\infty[$, $u$ est continue, $u\left(\frac{4}{3}\right) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ donc $u(x)$ prend des valeurs positives.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $u$ s'annule au moins une fois. Comme $u$ est croissante, elle s'annule une cule fois en $\alpha$.
À la calculatrice, on trouve $\boxed{2{,}20 < \alpha < 2{,}21}$.

(b) Signe de $u(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $u(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

(c) Pour tout $x$, $x^3$ a le même signe que $x$ donc $u^3$ a le signe de $u$.

2. $f$ est la composée d'une fonction polynôme avec une fonction puissance, donc elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. (a) $f = u^4$ donc $f" = 4u'u^3$ avec $u'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$.
On en déduit : $\boxed{f'(x) = 4x(3x-4)\left(x^3 - 2x^2 - 1\right)^3}$

(b) D'après 1.(c), $u^3$ a le signe de $u$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(3x-4)u(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{4}{3}$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $3x-4$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $u(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

4. On a vu que $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.
Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} X^4 = \boxed{+\infty}$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} X^4 = \boxed{+\infty}$.

5. Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{4}{3}$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $\approx 22{,}8$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

## VI

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 6}{x+1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1. Limite en $-\infty$ et en $+\infty$ :
Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = x\dfrac{-1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en -1 :
$\lim\limits_{x\to-1}\left(-x^2 - x + 6\right) = 6$ ; $\lim\limits_{x\to-1}(x+1) = 0$.
Il faut distinguer deux cas :
$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty}$ car $x-1$ tend vers 0 en étant négatif et le numérateur est positif.
De même : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty}$ car alors $x-1>0$.
Comme la lmite en -1 est infinie, la droite d'équation $x = -1$ est **asymptote** à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = -x^2 - x + 6$ et $v(x) = x+1$.
On a $u'(x) = -2x - 1$ et $v'(x)1$.
$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ d'où $f'(x) = \dfrac{(-2x-1)(x+1) - \left(-x^2 - x + 6\right)}{(x+1)^2} = \boxed{\dfrac{-x^2 - 2x - 7}{(x+1)^2}}$.

3. $f'(x)$ est du signe de son numérateur car $(x+1)^2$ est strictement positif.
On étudie le signe de $-x^2 - 2x - 7$.
$\Delta = -24 < 0$ donc ce trinôme du second degré est du signe du coefficient de $x^2$ donc négatif.
On en déduit que $f$ est décroissante sur chaque intervalle de l'ensemble de définition.

4. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est :
$y = f'(2)(x-2) + f(2)$ avec $f(2) = 0$ et $f'(2) = -\dfrac{5}{3}$.
On en déduit $y : -\dfrac{5}{3}(x-2)$ soit $\boxed{y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{10}{3}}$.

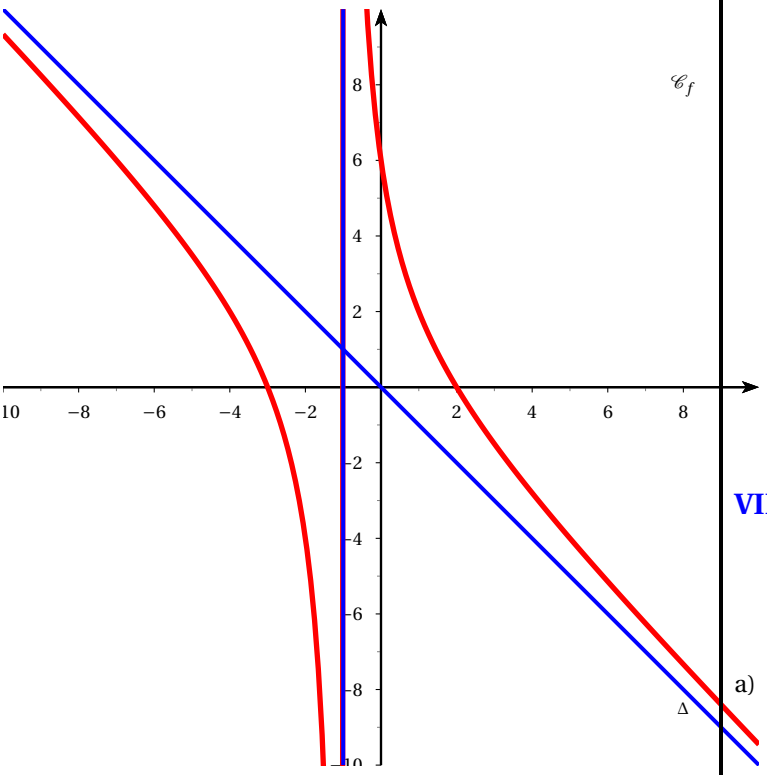
5. On résout l'équation $f(x) = 0$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = 0$.
On vient de trouver que 2 est une solution. l'autre solution est -3.
$\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en (-3 ; 0) et en (2 ; 0).
$f(0) = 6$ donc $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en (0 ; 6).

6. On étudie le signe de $f(x)$ en renseignant un tableau de signes.
Le numérateur s'annule en -3 et 2 ; il est négatif (du signe du coefficient de $x^2$) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines. D'où

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $2$ | | $2+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2 - x + 6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+1$ | | $-$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in ]-\infty\,;\,3] \cup [1+\infty]$ et en dessous pour $x \in [-3\,;\,1[\cup[3\,;\,+\infty[$.

Remarque : $f(x) = \dfrac{-x(x+1)+6}{x+1} = -x + \dfrac{6}{x+1}$. on en déduit que la droite $\Delta$ d'équation $y = -x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
La courbe n'était pas demandée (nous avions supprimé la question !). La voici (en rouge) , avec les asymptotes (en bleu)




:

## VII

1. On sait que $\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b\ [2\pi]$ ou $a = -b\ [2\pi]$.
   Soit l'équation $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
   - Premier cas :$2x + \dfrac{\pi}{4} = x - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc $x = -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$.
   - Deusième cas : $2x + \dfrac{\pi}{4} = -\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2k'\pi$ donc $3x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k'\pi$ qui donne $x = -\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2k'}{3}$.

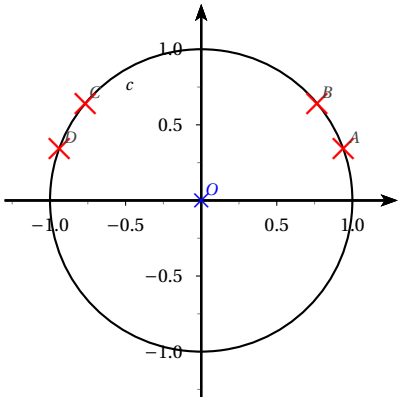
   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right] \cup \left\{-\frac{\pi}{26} + 2k'\frac{\pi}{3},\ k' \in \mathbb{Z}\right]}$$

2. (a) $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.
   - Premier cas : $3x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   - Deusième cas : $3x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \Leftrightarrow$ $3x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2k'\pi}{3}$, $k' \in \mathbb{Z}$.

   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{9} + 2k'\frac{\pi}{3},\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}$$

   (b) Les solutions appartenant à $[0\,;\,2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{9}$, $\dfrac{2\pi}{9}$, $\dfrac{7\pi}{9}$ et $\dfrac{9\pi}{9}$.

On place alors les quatre solutions appartenant à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, représentées par les points A, B, C et D :




## VIII

### Partie A :

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 + 3 \geqslant 3$ donc $\boxed{g'(x) > 0}$.
$g$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
Comme $g$ est continue, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution ; comme $g$ est croissante, celle-ci est unique. on la note $\alpha$.
À la calculatrice, on trouve $\boxed{-1{,}6 < \alpha < -1{,}5}$.

b) P$g(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $g(\alpha) = 0$ et $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

### Partie B

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe representative ( unité 1cm)

1. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.
   $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3 - 4$ et $v(x) = x^2 + 1$.
   $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 2x$.
   On en déduit $f'(x) = \dfrac{3x^2\left(x^2+1\right) - 2x\left(x^3-4\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 8x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 6x}{\left(x^2+1\right)^2} = \boxed{\dfrac{xg(x)}{\left(x^2+1\right)^2}}$

2. Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^3\left(1-\frac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = x \times \dfrac{1-\frac{4}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}$.

   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$.

   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x=-\infty)}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3. Par définition de $\alpha$, on a $\alpha^3+3\alpha+8=0$.
   On en déduit : $\alpha^3+3\alpha=-8 \Leftrightarrow \alpha^3+2\alpha^3+3\alpha = 2\alpha^3-8 \Leftrightarrow 3\alpha^3+3\alpha = 2\alpha^3-8$
   $\Leftrightarrow 3\alpha\left(\alpha^2+1\right) = 2\left(\alpha^3-4\right) \Leftrightarrow \dfrac{3\alpha}{2} = \dfrac{\alpha^3-4}{\alpha^2+1} = f(\alpha)$ donc $\boxed{f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha}$

4. Comme le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$.
   Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}\alpha$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5. $ax + b + \dfrac{cx+d}{x^2+1} = \dfrac{(ax+b)\left(x^2+1\right)+cx+d}{x^2+1} = \dfrac{ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d}{x^2+1}$.
   On veut que cette expression soit égale à $f(x)$.
   On identifie les coefficients du numérateur.
   On obtient $a=1$, $b=0$, $c=-1$ et $d=-4$ d'où $f(x) = x+\dfrac{-x-4}{x^2+1} = \boxed{x-\dfrac{x+4}{x^2+1}}$

6. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)-x = -\dfrac{x+4}{x^2+1}$.

   Pour $x \neq 0$, on obtient $-x\dfrac{\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\text{ůrac}1x^2\right)} = -\dfrac{1+\frac{4}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$.

   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to\text{śpm}\infty}\left[-\dfrac{1+\frac{4}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right] = 0$.

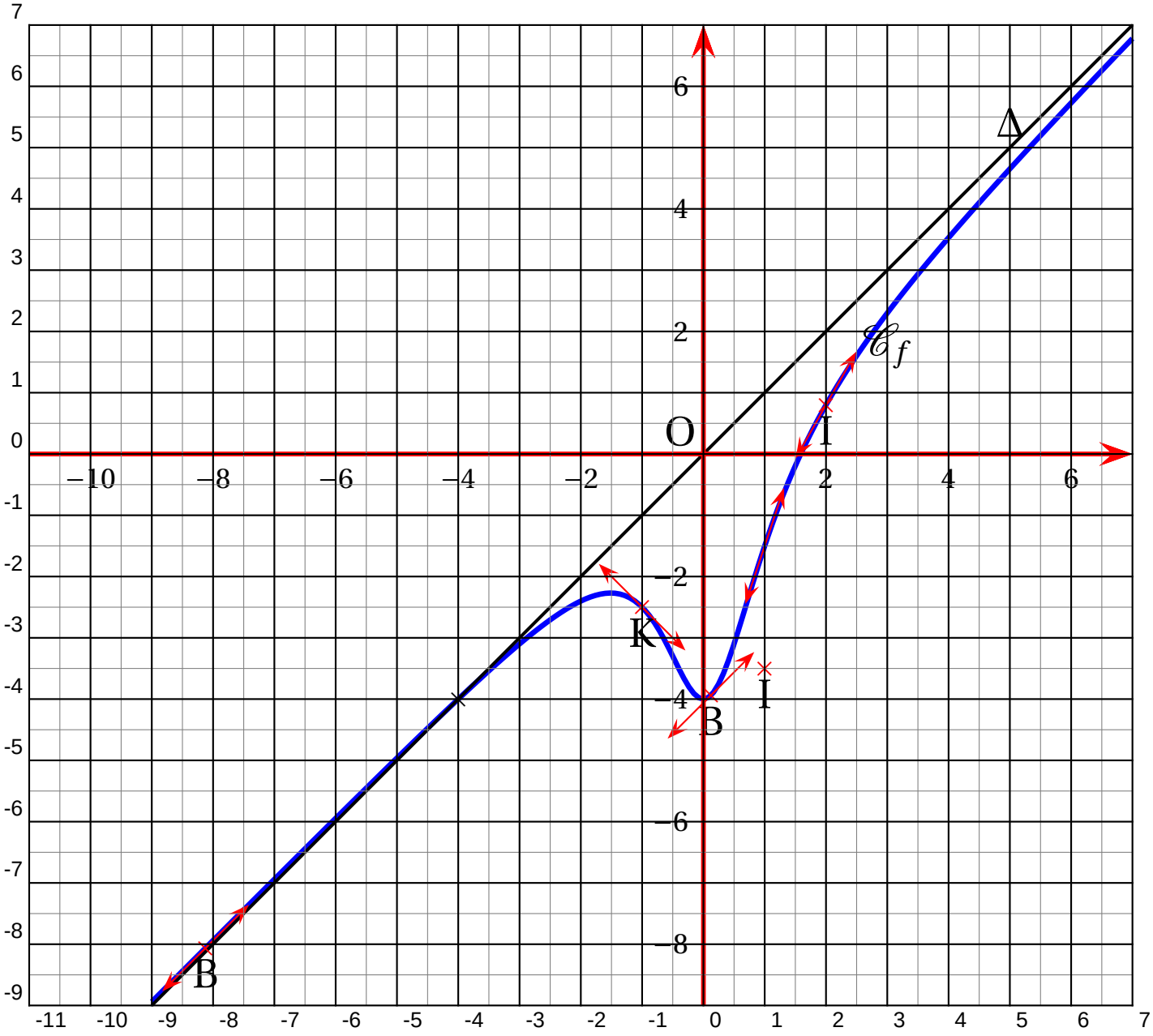
   'Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{x\to\text{śpm}\infty}[f(x)-x] = 0}$

   (b) Puisque $\lim\limits_{x\to\text{śpm}\infty}[f(x)-x] = 0$, la droite $\Delta$ d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

   (c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)-x = -\dfrac{x+4}{x^2+1}$ qui est du signe de $-(x+4)$, donc positif pour $x \leqslant -4$ et négatif pour $x \geqslant -4$.
   On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\Delta$ pour $x \leqslant -4$ et en dessous pour $x \geqslant -4$ avec intersection en $x=-4$.

7. $\Delta$ a pour coefficient directeur 1 ; on doit donc résoudre l'équation $f'(x)=1$.
   $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{xg(x)}{\left(x^2+1\right)^2} = 1 \Leftrightarrow xg(x) = x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow x\left(x^3+3x+8\right) = x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow x^4+3x^2+8x = x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow x^2+8x-1=0$.
   $\Delta = 68$ ; les deux solutions sont $\dfrac{-8-\sqrt{68}}{2} = \dfrac{-8-2\sqrt{17}}{2} = -4-\sqrt{17}$ et $-4+\sqrt{17}$.

8. Pour le tracé :

   - $f(1) = -\dfrac{3}{2}$ et $f'(1) = 3$ (coefficient directeur de la tangente)
   - $f(2) = \dfrac{4}{5}$ et $f'(2) = \dfrac{44}{25}$
   - $f(-1) = -\dfrac{5}{2}$ et $f'(-1) = -1$.

# Courbe de l'exercice VIII