TS : correctin du DM n° 1

I

Soit l'inéquation $\dfrac{2x+3}{x+5} \geqslant \dfrac{-5x-2}{x-1}$.

L'ensemble de définition est $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\ ;\ 1\}}$.

On suppose que $x \in \mathscr{D}$.

Alors $\dfrac{2x+3}{x+5} \geqslant \dfrac{-5x-2}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x+5} - \dfrac{-5x-2}{x-1} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+3)(x-1)-(x+5)(-5x-2)}{(x+5)(x-1)} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+3)(x-1)+(x+5)(5x+2)}{(x+5)(x-1)} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left[2x^2-2x+3x)3\right]+\left[5x^2+2x+25x+10\right]}{(x+5)(x-1)} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{7x^2+28x+7}{(x+5)(x-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{7\left(x^2+4x+1\right)}{(x+5)(x-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x+1}{(x+5)(x-1)} \geqslant 0.$

(après simplification par 7)

On étudie le signe du numérateur et celui du dénominateur.

Signe de x^2+4x+1 : $\Delta = 12 > 0$; l'expression a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{12}}{2} = \dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\left(-2-\sqrt{3}\right)}{2} = -2-\sqrt{3}$ et

$x_2 = -2+\sqrt{3}$.

Le coefficient de x^2 est 1, positif, donc l'expression est positive à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

Signe du dénominateur $(x+5)(x-1)$. les deux racines sont -5 et 1 ; le coefficient de x^2 est 1, donc positif. L'expression est positive à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

On renseigne alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
x^2+4x+1		$+$	‖	$-$	0	$-$	0	$-$	‖	$+$	
$(x+5)(x-1)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	
Quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est finalement :

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -5[\cup[-2-\sqrt{3}\ ;\ -2+\sqrt{3}]\cup[1\ ;\ +\infty[}.$$

II

1. • On suppose (u_n) arithmétique : le terme général est de la forme $u_0 + nr$ donc de la forme $an+b$ avec $a = r$ et $b = u_0$.

   • Réciproquement : on suppose que $u_n = an+b$: pour tout n ;, $u_{n+1} - u_n = a$ donc la suite (u_n) est arithmétique.

   Conclusion :

   $\boxed{\text{les suites arithmétiques sont les suites dont l'expression est une fonction affine de } n}$.

2. • On suppose (u_n) géométrique : le terre général est de la forme $u_0 q^n$ donc de la forme aq^n avec $a = u_0$.

   • Réciproquement : on suppose que $u_n = aq^n$: pour tout n ;, $u_{n+1} = qu_n$ donc la suite (u_n) est géométrique.

   Conclusion :

   $\boxed{\text{les suites géométrique sont les suites dont l'expression est de la forme } aq^n}$.

III

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

Démontreonpar récurrence que, pour tout n, u_n est un nombre rationnel.

Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ avec a_n et b_n eniers naturels, $b_n \neq 0$.

- **Initialisation** : $u_0 = \dfrac{3}{2} \in \mathbb{Q}$. La proposition est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité** On suppose la proposition vraie à un rang n quelconque. IL existe a_n et $b_,$ entiers naturels tels que $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

  $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} = \dfrac{1}{1+\frac{a_n}{b_n}} = \dfrac{1}{\frac{a_n+b_n}{b_n}} = \dfrac{b_n}{a\acute{I}n+b_n}$.

  On pose $a_{n+1} = bn \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} = a_n + b_n \in \mathbb{N}$

  avec $b_{n+1} \geqslant b_n \neq 0$.

  La propriété est **héréditaire**.

La propriété est donc vraie pour tout n, d'près l'axiome de récurrence.

On a $a_0 = 3$, $b_0 = 2$, $\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ a_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

IV

La suite de Fibonacci est définie par : $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$.

- **Initialisation** : $F_1 \times F_2 = 1 \times 1 = 1$ et $F_1^2 = 1^2 = 1$ donc $F_1^2 = F_1 \times F_2$. La propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité** On suppose la propriété vraie au rang n, donc :

  $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$.

  Alors : $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = \left[F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2\right] + F_{n+1}^2$

  $= F_n \times F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}\left[F_n + F_{n+1}\right] = F_{n+1} \times F_{n+2}$

  car $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$.

  La propriété est vraie au rang $n+1$.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

Remarque : on peut montrer, par exemple par une méthode analogue à celle utilisée dans un TD précédent où nous avons cherché deux réels a et b tels que $a+b = 4$ et $ab = 1$, que pour tout n :

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

.

V

Héléne a acheté une voiture d'occasion à 3 500 € le 1er janvier 2006.

Une étude statistique montre que si u_n et u_{n+1} sont les valeurs de cette automobile le 1er janvier respectivement de la n-iéme année et de la $(n+1)$-iéme qui suivent l'achat, alors :

$$u_{n+1} = 0,7u_n + 210.$$

On pose $u_0 = 3500$.

1. On a $u_1 = 2660$ et $u_2 = 2072$.

2. (a) On note α la solution de l'équation $x = 0,7x + 210$ (qu'on appelle point fixe de la fonction $f : x \mapsto 0,7x + 210$).
Par conséquent $\alpha = 0,7\alpha + 210$.
Valeur de α : $x = 0,7x + 210 \Leftrightarrow 0,3x = 210$ d'où $\alpha = \dfrac{210}{0,3} = -\dfrac{2100}{3} = 700$.

On en déduit $\begin{cases} u_{n+1} = 0,7u_n + 210 \\ \alpha = 0,7\alpha + 210 \end{cases}$.
Par soustraction, on obtient $= u_{n+1} - \alpha = 0,7(u_n - \alpha)$.
Par conséquent : $v_{n+1} = 0,7v_n$: la site (v_n) est **géométrique**, de raison $q = 0,7$.

Autre méthode : pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 700$
$= 0,7u_n + 210 - 700 = 0,7u_n - 490 = 0,7(u_n - 700)$
$= 0,7v_n$ donc la suite (v_n) est **géométrique** de raison 0,7.

(b) On en déduit $v_n = v_0 q^n$: $v_0 = u_0 - \alpha = 3500 - 700$
$= 2800$.
Par conséquent : $\boxed{v_n = 2800 \times 0,7^n}$.
Alors : $u_n = v_n + \alpha = \boxed{700 + 2800 \times 0,7^n}$.

3. En faisant un tableau de valeurs sur la calculatrice, on trouve que la voiture vaudra moins de 1 000 euros au bout de 7 ans.

VI

1. (a) On a $f(x) = 2x - \dfrac{x^2}{10}$, donc $f'(x) = 2 - \dfrac{x}{5} = \boxed{\dfrac{10-x}{5}}$.
$f'(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant 10$ et $f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 10$. La fonction f est donc croissante sur $[0\,;10]$ et décroissante sur $[10\,;20]$.

(b) Sur $[0\,;20]$, le maximum de f est donc
$f(10) = 10$, $f(0) = 0$ et $f(20) = 0$ sont les minimums de f.
On a donc quel que soit $x \in [0\,;20]$, $f(x) \in [0\,;10]$.

(c) Voir ci-dessous.

2. Démontrons par récurrence la propriété P_n : pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

- Initialisation : On a $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2 - 0,1 = 1,9$ On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$.
- Hérédité : Supposons qu'il existe une valeur de n quelconque, pour laquelle la propriété P_n soit vraie, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
On a vu que sur l'intervalle $[0;\,10]$, le fonction f est croissante, donc $\leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \iff u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
De plus d'après la question **1. b.** quel que soit un nombre dans l'intervalle $[0;\,20]$ et *a fortiori* dans l'intervalle $[0\,;10]$, son image par f et elle aussi dans l'intervalle $[0 : 10]$. on a donc bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$.
La propriété est héréditaire.

Le propriété est donc vraie pour tout n.

.

3. On vient de démontrer que, pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Comme elle majorée par 10, elle converge vers une limite ℓ inférieure ou égale à 10.
On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
$f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{10}x(20-x) = x \Leftrightarrow x(20-x) = 10x$
$\Leftrightarrow -x^2 + 20x = 10x$
$\Leftrightarrow -x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x(10-x) = 0$.
L'équation a deux solutions 0 et 10. Comme (u_n) est croissante et que $u_0 = 1$ et la suite étant croissante, la suite est minorée par 1, donc la limite ne peut pas être 0.
Par conséquent : $\boxed{\ell = 10}$.