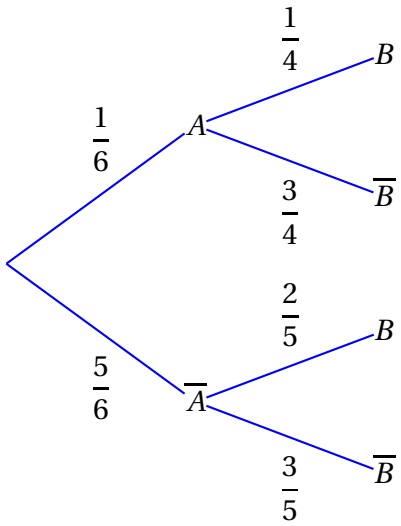
Correction de la feuille de révision (18 avril 2015)

I Nouvelle-Calédonie mars 2012

1. (a)



(b) D'après la loi des probabilités totales : $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3}$
$= \frac{1}{24} + \frac{8}{24} = \frac{9}{24} = \boxed{\frac{3}{8} = 0,375}$.

(c) $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{24} \times \frac{8}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}$.

2. (a) On a répétition de parties identiques, indépendantes, à deux issues, donc la variable X suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$.
La probabilité de gagner exactement trois parties est égale à :
$p(\mathrm{X} = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10-3} = \boxed{\binom{10}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^7 \approx 0{,}2357 \approx 0{,}236}$ au millième près.

Remarque : on peut calculer directement $p(X = k)$ à la calculatrice, en tapant sur une TI :
$\boxed{\text{Distrib}}$, $\boxed{\text{BinomFdp}}$(n, p, k) $\boxed{\text{Entrée}}$.

(b) On a $p(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - \times \left(\frac{3}{8}\right)^0 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = \boxed{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \approx 0{,}9909 \approx 0{,}991}$ au millième près.

(c) On veut que $p(X \geqslant N) \leqslant 0,1$, donc $1 - p(X < N) < 0,1$.
On en déduit $p(X < N) > 0,9$.
À partir du tableau donné on trouve $\boxed{N = 7}$.

II Nouvelle Calédonie mars 2015

1. (a) 2% des puces livrées ont une durée de vie courte, c'est-à-dire $\boxed{P_L(C) = 0,02}$. (il suffit de lire l'énoncé !)

   (b) On en déduit que $\boxed{P_L\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,02 = 0,98}$ et

   $P\left(L \cap \overline{C}\right) = P(L) \times P_L\left(\overline{C}\right) = \boxed{0,95 \times 0,98 = 0,931}$.

   (c) Comme seules les puces livrées peuvent avoir une durée de vie courte on a :

   $P\left[\overline{L} \cup (L \cap C)\right] = P\left(\overline{L}\right) + P(L \cap C) = 0,05 + 0,019 = \boxed{0,069}$.

2. (a) On sait que $P(X \leqslant 1000) = 0,02$.

   X suit une loi exponentielle de paramètre λ, donc :

   $P(X \leqslant 1000) = 1 - \mathrm{e}^{-1000\lambda} = 0,02 \iff \mathrm{e}^{-1000\lambda} = 1 - 0,02 \iff$

   $\mathrm{e}^{-1000\lambda} = 0,98 \Rightarrow -1000\lambda = \ln 0,98 \iff \boxed{\lambda = \dfrac{-\ln 0,98}{1000}}$.

   (b) $P(X \geqslant 10000) = \mathrm{e}^{-10000\lambda} = \boxed{\mathrm{e}^{-10\ln 0,98} \approx 0,817}$.

   Donc environ 81,7 % des puces ont une durée de vie supérieure ou égale à 10 000 heures.

   (c) $P(20000 \leqslant X \leqslant 30000) = \boxed{\mathrm{e}^{-20000\lambda} - \mathrm{e}^{-30000\lambda} \approx 0,122}$.

   Soit : environ 12,2 % des puces ont une durée de vie comprise entre 20 000 et 30 000 heures.

3. (a) On effectue 15 000 tirages indépendants les uns des autres. La probabilité qu'une puce livrée ait une vie courte est $p = 0,003$.

   Y suit donc une **loi binomiale** de paramètres $n = 15000$ et $p = 0,003$..

   (b) $\mathrm{E}(Y) = n \times p = 15000 \times 0,003 = \boxed{45}$.

   Il y a environ 45 puces à durée de vie courte sur les 15 000 extraites de la production.

   (c) On a $P(40 \leqslant Y \leqslant 50) = P(Y \leqslant 50) - P(Y < 40) = P(Y \leqslant 50) - P(Y \leqslant 39)$.

   La calculatrice donne $P(Y \leqslant 50) \approx 0,7966$ et $P(Y \leqslant 39) \approx 0,2080$, donc :

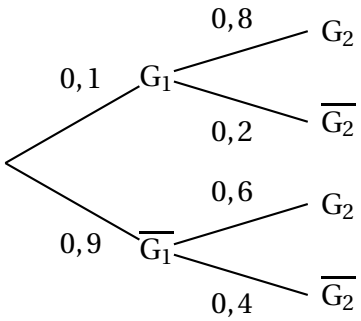
   $P(40 \leqslant Y \leqslant 50) \approx 0,7966 - 0,2080 \approx 0,589$.

   Remarque : on calcule $p(X \leqslant k)$ avec une TI en tapant :

   Distrib BinomFRep (n, p,k) Entrée

III Polynésie juin 2011

1. On a l'arbre pondéré suivant :

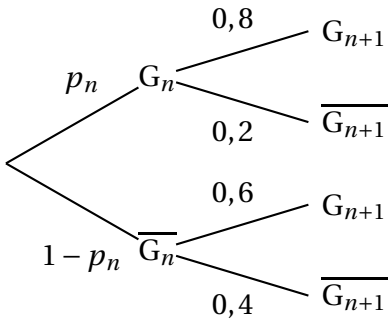


2. On a $p_2 = p(G_1 \cap G_2) + p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{(G_1)}}(G_2) =$
$0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$.

3. Il faut trouver $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right) = \dfrac{p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)}{p(G_2)} = \dfrac{0,54}{0,62} = \boxed{\dfrac{27}{31}}$.

4. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,9 \times 0,4 \times 0,4 = \boxed{0,144}$.
La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à
$1 - 0,144 = \boxed{0,856}$.

5. À la partie n, on a l'arbre suivant :



On a donc $p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p\left(\overline{G_n}\right) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = p_n \times 0,8 +$
$\left(1 - p_n\right) \times 0,6$
$= 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6 = \boxed{\dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}}$.

6. *Initialisation* On a bien $\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{15-13}{20} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1 = p_1$.
Hérédité
Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ tel que $p_a = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a$.
D'aprËs la formule démontrée à la question 4 :
$p_{a+1} = \dfrac{1}{5}p_a + \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a\right] + \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1} = \dfrac{3}{20} + \dfrac{12}{20} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1}$. La propriété est vraie au rang $a+1$.
On a donc démontré par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$.

7. Comme $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = \boxed{0}$, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \dfrac{3}{4} = \boxed{0,75}$.

8. On a : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \iff \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) < 10^{-7} \iff \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \iff \left(\frac{1}{5}\right)^n < \frac{4}{13} \times 10^{-7} \iff$

(par croissance de la fonction logarithme népérien) $n\ln\left(\frac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{4 \times 10^{-7}}{13}\right) \iff \boxed{n > \frac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}}$.

Or $\frac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \approx 10,7$.

Donc u_{11} approche la limite $\frac{3}{4}$ à moins de 10^{-7}.

IV Pondichéry avril 2012

1. (a) Les fonctions représentées sont positives ; I_n représente donc l'aire limité par le représentation de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Le dessin suggËre que la suite (I_n) est **décroissante**.

   (b) On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{1+x} - \frac{e^{-nx}}{1+x} = \frac{e^{-nx} \times e^{-x}}{1+x} - \frac{e^{-nx}}{1+x} = \frac{e^{-nx}}{1+x}\left(e^{-x} - 1\right)$.
   Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1 + x \leqslant 2$: donc $1 + x > 0$;
   D'autre part on sait que $e^{-x} > 0$. Enfin $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -x \leqslant 0 \Rightarrow$ (par croissance de la fonction exponentielle) $e^{-1} \leqslant e^{-x} \leqslant e^0$.
   Donc $e^{-x} \leqslant 1 \iff e^{-x} - 1 \leqslant 0$ et finalement par produit
   $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant 0 \iff f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$: la suite $\left(f_n\right)$ est décroissante. Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des fonctions positives f_{n+1} et f_n :
   $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \Rightarrow I_{n1} \leqslant I_n$: la suite (I_n) est **décroissante**.

2. (a) $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1 + x \leqslant 2 \iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :
   $\frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}$.
   D'autre part on sait que pour $1 + x \geqslant 1$, on a $(1+x)^2 \geqslant 1 + x \iff$
   $\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant \frac{1}{1+x}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :
   $\frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x}$.
   Enfin il est évident que $\frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} > 0$, donc finalement :

   $$\boxed{0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}}.$$

   (b) Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des inégalités précédentes on obtient =
   $\int_0^1 0\,dx \int_0^1 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx$ soit encore
   $0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$ c'est à dire :
   $0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant -\frac{1}{n}\left(e^{-nx} - 1\right)$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\left(e^{-nx} - 1\right) = 0$.
   Conclusion d'aprËs le théorème des « gendarmes », les suites (I_n) et (J_n) **convergent vers 0**.

3. (a) i. $(uv)' = u'v + uv'$ donc $uv' = (uv)' - u'v$.

ii. On pose $u(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$.

On en déduit $u'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et $v(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

On utilise le résultat du a)

$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[(uv)' - u'v\right](x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x =$

$[u(x)v(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = u(1)v(1) - u(0)v(0) + \frac{1}{n}J_n = -\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}J_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right)$

(b) Le résultat précédent peut s'écrire en multipliant par $n \neq 0$:

$nI_n = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n$.

Comme $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} J_n = 0$, on a donc :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} nI_n = 1$$

Remarque : on a donc pour n assez grand $I_n \approx \dfrac{1}{n}$.

Exemple : pour $n = 10$, la calculatrice donne $I_{10} \approx 0,091 \approx \dfrac{1}{10}$.

V Liban mai 2012

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} > 0, \text{ car somme de nombres positifs sur }]0\,;+\infty[$$

La fonction g est donc croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$+$		
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2. La fonction g est continue (comme somme de fonctions continues) et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$.
Or $0 \in]-\infty\,;+\infty[$, 0 possède donc un unique antécédent, que l'on notera α. Nous avons donc $g(\alpha) = 0$.
De plus,

$$\begin{cases} g(0,86) \simeq -0,0295 < 0 \\ g(0,87) \simeq +0,0385 > 0 \end{cases} \Longrightarrow g(0,86) < g(\alpha) = 0 < g(0,87) \Longleftrightarrow \boxed{0,86 < \alpha < 0,87}$$

3. Signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$\begin{cases} 0 < x < \alpha \Longrightarrow g(x) < g(\alpha) = 0 \\ x > \alpha \Longrightarrow g(x) > g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. — Limite de la fonction f en 0 :

$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = +\infty, \text{car } \lim_{x\mapsto 0^+} 2x = 0 \text{ et } \lim_{x\mapsto 0^+} -\ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

   — Limite de la fonction f en $+\infty$

$$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\mapsto +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ (\textit{puissances comparées})}$$

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.
   En effet :

$$\lim_{x\mapsto +\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

   — Le signe de $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ est celui de $-\ln x$, car $x^2 > 0$:
   — Position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ :
     — Sur $]0\,;1[$, $-\ln x > 0$, $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ,
     — sur $]1\,;+\infty[$, $-\ln x < 0$, $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ,
     — $\mathscr{C}$ et Δ ont un point commun $A(1,2)$.

3. Dérivée $f'(x)$ de f :

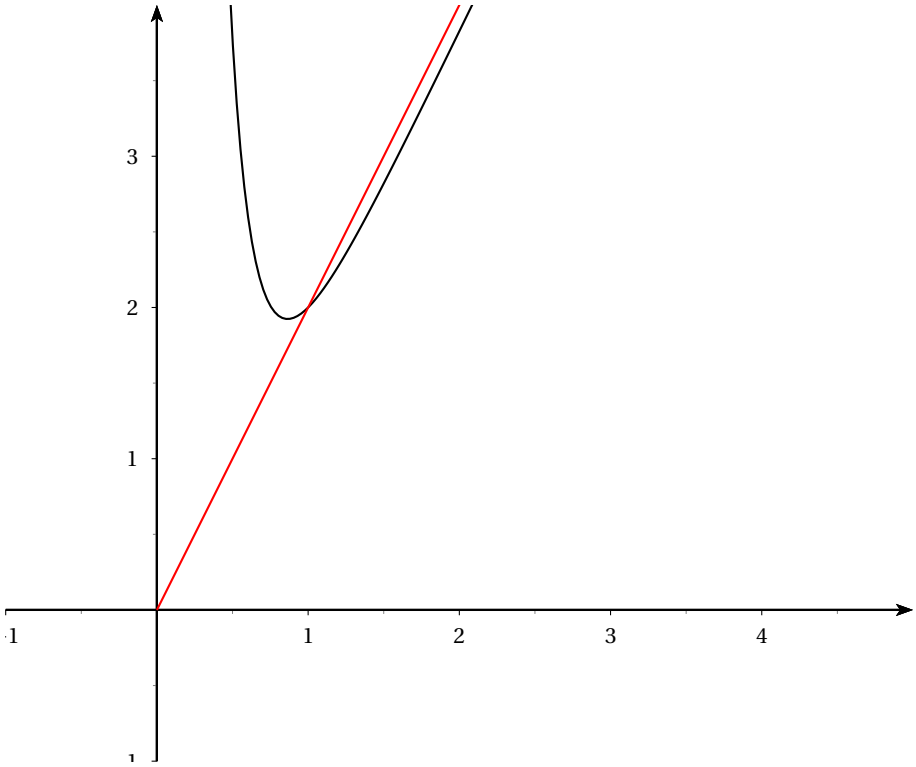
$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{2x^4 - x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

   $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ car x^3 est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$.

4. Tableau de variations de la fonction f :

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$		0		$+$
Óm $f(x)$	‖	↘	$f(\alpha)$	↗	2	↗	$+\infty$

5. Figure :



Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par (u.a ; (unité d'aire)=2cm^2) :

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

car l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$ est :

$$\int_1^n \left(2x - \left(2x - \frac{\ln x}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x \times \text{u.a.} = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \times \text{u.a.} = 2 \times \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = I_n$$

2. (a) Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$.

On remarque que $uv' = (uv)' - u'v$ donc :

$$\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} = \int_1^n \left[(uv)' - u'v\right](x)\,\mathrm{d}x = \int_1^n (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^n u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x)v(x)]_1^n - \int_1^n \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = u(n)v(n) - u(1)v(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\ln(n)}{n} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{\ln(n)}{n} + 1 - \frac{1}{n} = \boxed{\frac{n - 1 - \ln n}{n}}$$

(b) Ainsi :

$$\boxed{I_n = 2\frac{n - 1 - \ln n}{n} = 2 - \frac{2}{n} - \frac{2\ln n}{n}}$$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 2$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln n}{n} = 0$ (croissances comparées)

VI Centres étrangers juin 2014

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

   (a)
   - $f_1(0) = 0$: évident ;
   - $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$;
   - f_1 fonction polynôme est dérivable sur $[0\,;\,1]$ donc continue sur cet intervalle ;
   - $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 3(2x-1)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,1]$.

   f_1 est donc bien une fonction de retouche.

   (b) Il semble que la courbe coupe la droite d'équation $y = x$ pour $x = 0,5$.
   On peut vérifier que $f_1(0,5) = 0,5$.
   On a donc $f_1(x) \leqslant x \iff x \geqslant 0,5$.
   Ce résultat signifie que f_1 éclaircie les nuances codées par un nombre inférieur à 0,5 et inversement pour celles codées par un réel entre 0,5 et 1.

2. (a) f_2 est une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, donc g l'est aussi et :
   $g'(x) = f_2'(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{1+(\mathrm{e}-1)x} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1-1-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x} = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$.

   (b) Comme $\mathrm{e} > 1$, le dénominateur est positif comme somme de termes positifs ; le signe de $g'(x)$ est donc celui de son numérateur ; or
   $\mathrm{e}-2-(\mathrm{e}-1)x \geqslant 0 \iff \mathrm{e}-2 \geqslant (\mathrm{e}-1)x \iff \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \geqslant x$
   On a $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \approx 0,418$.
   On a donc avec $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} = a$,
   $g'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant a$ et de même
   $g'(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant a$.
   La fonction g est donc croissante sur $[0\,;a]$, puis décroissante sur $[a\,;\,1]$.
   g a donc un maximum $g(a) \approx 0,12$.

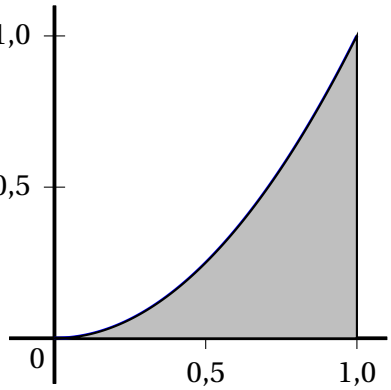
   (c) D'après la question précédente sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ la fonction g est continue et croissante de $g(0) = 0$ à $g(a) \approx 0,12$.
   Comme $0,05 \in [0\,;\,a]$, il existe une valeur unique α de $[0\,;\,a]$ telle que $f(\alpha) = 0,05$.
   On démontre de même (avec g décroissante) que sur $[a\,;\,1]$ il existe un réel unique β tel que $g(\beta) = 0,05$.
   On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

1. Cet algorithme calcule le nombre de nuances par palier de 0,01 pour lesquelles la modification est perceptible visuellement.
2. On applique l'algorithme à la fonction $g = f_2 - x$. Il calcule toutes valeurs telles que $g(x) \geqslant 0,05$.
   Ce sont d'après la question précédente toutes les nuances comprises entre 0,09 et 0,85 : l'algorithme doit donc retourner : $c = 85 - 9 + 1 = 77$.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$.
On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathscr{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{(x^2-1)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. (a) f_1 produit de fonctions positives sur $[0\,;1]$ est positive sur cet intervalle. On a donc :
   $\mathscr{A}_{f_1} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{(x^2-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{(x^2-1)}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right).$
   (b) On a $f_2(0) = -15 + 15 = 0$ et comme il est admis qu'elle est une fonction de retouche elle est croissante sur $[0\,;1]$, donc positive sur cet intervalle. On a donc :
   $\mathscr{A}_{f_2} = \displaystyle\int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4}\right)\mathrm{d}x = \left[2x^2 - 15x + 60\ln(x+4)\right]_0^1 =$
   $2 - 15 + 60\ln 5 - 60\ln 4 = -13 + 60\ln\frac{5}{4}.$
2. On a $\mathscr{A}_{f_1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0,316$ et $\mathscr{A}_{f_2} = -13 + 60\ln\dfrac{5}{4} \approx 0,389$.
   C'est la fonction f_1 qui éclaircit le plus l'image.

VII Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$$

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. $u_0 = |z_0| = \left|\sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = 2$.
2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+\mathrm{i})z_n| = |1+\mathrm{i}| \times |z_n| = \sqrt{2}|z_n| = \sqrt{2}u_n$
3. D'après le cours, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n$; (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2} > 1$ et de premier terme strictement positif, elle diverge donc vers $+\infty$.
5.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	Tant que $u \leqslant p$ Faire
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$
		Fin du Tant Que
Sortie	:	Afficher n

Partie B

1. $z_1 = (1+\mathrm{i}) \times (\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)$.
2. $z_0 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$

   $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

   $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$.
3. Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

   D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$