TS-correction de la feuille de révisions n° 4

I Pondichéry avril 2012

Proposition 1

Un vecteur directeur $\vec{d}$ de la droite $\mathscr{D}$ a pour cordonnées $(-2\,;\,2\,;\,2)$;
Un vecteur $\vec{u}$ normal au plan $\mathscr{P}$ a pour cordonnées $(1\,;\,-1\,;\,-1)$.
Comme $\vec{d} = -2\vec{u}$, es vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. **VRAIE**

Proposition 2

Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient ‡ $\mathscr{P}$ et ‡ $\mathscr{P}'$ si ses coordonnées vérifient les deux équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y-z-2 & = & 0 \\ x+y+3z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-y & = & z+2 \\ x+y & = & -3z \end{array}\right. \Rightarrow \text{(par somme) } 2x=-2z+2 \iff x=-z+1.$$

En reportant dans la première équation on obtient :
$-z+1-y=z+2 \iff -2z-1=y$.
Finalement en posant $z=t'$, on a :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P}\cap\mathscr{P}' \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t' \\ y & = & -1-2t' \\ z & = & t' \end{array}\right. \quad \textbf{VRAIE}$$

Remarque : on peut aussi vérifier que les points de Δ appartiennent aux deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ en remplaçant dans les équations des deux plans x, y et z per leurs expressions en fonction de t.

Proposition 3

Un vecteur directeur $\vec{d}$ de la droite $\mathscr{D}$ a pour cordonnées $(-2\,;\,2\,;\,2)$;
Un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite Δ a pour cordonnées $(-1\,;\,-2\,;\,1)$;
$\vec{d}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas parallèles ; si elles sont sécantes il existe un point $M(x\,;\,y\,:\,z)$ dont les cordonnées vérifient les deux représentations paramétriques soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -3-2t & = & 1-t' \\ 2t & = & -1-2t' \\ 1+2t & & t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t' & = & 2t+4 \\ 2t' & = & -1-2t \\ t' & = & 1+2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1+2t & = & 2t+4 \\ 2(1+2t) & = & -1-2t \\ t' & = & 1+2t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 0t & = & 3 \\ 6t & = & -3 \\ t' & = & 1+2t \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution : les droites $\mathscr{D}$ et Δ n'étant ni parallèles ni sécantes ne sont pas coplanaires. **FAUSSE**

II Amérique du Nord mai 2013

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X\leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. $P(390\leqslant X\leqslant 410)=P(X\leqslant 410)-P(X<390)=0,818-0,182=\boxed{0,636}$.
   On peut aussi utiliser la calculatrice.
2. Un pain choisi au hasard dans la production est commercialisable si et seulement si « $X\geqslant 385$ ».
   « $X\geqslant 385$ »est l'événement contraire de « $X<385$ ».
   On a donc $p(X\geqslant 385)=1-p(X<385)=1-0,086=\boxed{0,914}$.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.
   Soit Y la variable aléatoire de paramètres $\mu=400$ et σ, on a :
   $p(X\geqslant 385)=0,96 \Leftrightarrow 1-p(Y<385)=0,96 \Leftrightarrow p(Y<385)=0,04$
   Si Y suit une loi normale de paramètres $\mu=400$ et σ, on sait que $Z=\dfrac{X-400}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite et $p(Y<385)=0,04 \Leftrightarrow P\left(Z\leqslant\dfrac{385-400}{\sigma}\right)=0,04$.
   Or $P(Z\leqslant -1,751)\approx 0,040$.On a donc : $\dfrac{-15}{\sigma}=-1,751 \Leftrightarrow \sigma=\dfrac{15}{1,751}=\boxed{8,6}$.
   Pour $\sigma=8,6$, au dixième près ; la probabilité qu'un pain soit commercialisable est de 96%

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 est de la forme

$$I_{300} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

   avec $p = 0,96$ et $n = 300$.
   On a donc : $\boxed{I_{300} = [0,93 \ ; \ 0,99]}$
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Ce qui représente 94 % de la production. 0,94 est dans l'intervalle de fluctuation I_{300}.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, on accepte que l'objectif a été atteint.

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une **loi exponentielle** de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de $p(T \geqslant 30) = 0,913$.
   On a par ailleurs : $p(T \leqslant 30) = \displaystyle\int_0^{30} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{30} = 1 - \mathrm{e}^{-30\lambda}$.
   On en déduit : $p(T \geqslant 30) = 1 - p(T \leqslant 30) = \mathrm{e}^{-30\lambda}$ et finalement :
   $\mathrm{e}^{-30\lambda} = 0,913 \Leftrightarrow -30\lambda = \ln(0,913) \Leftrightarrow \boxed{\lambda \approx 0,003}$.
   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.
2. Calculons $p_{T\geqslant 60}(T \geqslant 90)$.
   On a $p_{T\geqslant 60}(T \geqslant 90) = \dfrac{p((T \geqslant 60) \cap (T \geqslant 90))}{p(T \geqslant 60)} = \dfrac{p(T \geqslant 90)}{p(T \geqslant 60)} = \dfrac{1 - p(T \leqslant 90)}{1 - p(T \leqslant 60)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-90\lambda}}{\mathrm{e}^{-60\lambda}} = \boxed{\mathrm{e}^{-30\lambda}}$. (On pouvait le trouver directement puisqu'une moi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement)
   On a donc $p_{T\geqslant 60}(T \geqslant 90) = p(T \geqslant 30) = \boxed{0,913}$.
   La probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours est 0,913.
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. Calculons la durée maximale t_{max} pour laquelle la probabilité que la balance dérègle est inférieure à 0,5.
   $p(T \leqslant t_{\max}) \leqslant 0,5 \iff = \displaystyle\int_0^{t_{\max}} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \leqslant 0,5 \iff [-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^{t_{\max}} \leqslant 0,5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_{\max}} \leqslant 0,5$
   $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_{\max}} \leqslant 0,5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda t_{\max}} \geqslant 0,5 \Leftrightarrow -\lambda t_{max} \geqslant \ln 0.5$
   Avec $\lambda = 0,003$, on trouve $t_{\max} \approx \boxed{231}$. Le vendeur avait donc **tort**.
   On pouvait aussi calculer $P(X \geqslant 365)$ et on troue moins de 0,5

III Liban mai 2013

1. L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.
   L'algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.
   L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à v_{n-1} et les affiche tous : il manque donc en fait l'affichage de v_n !
2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à $n = 9$, il semblerait que la suite soit **croissante** et converge vers un nombre **proche de 3**.
3. (a) Montrons par récurrence la proprieété $P_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n.
   Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.
   Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.
   On suppose donc que $0 < v_n < 3$.
   Donc $6 = 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 = 3$, puis
   $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6 - v_n} < \dfrac{1}{3}$, car la fonction inverse est décroissante sur $]0 \ ; \ +\infty[$.

$\frac{3}{2}\frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3} = 3.$

Ainsi $1 < \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3$. L'hérédité est tablie puisque P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, : $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n.

(b) Pour tout n, $v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6-v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6-v_n)}{6-v_n} = \boxed{\frac{(v_n-3)^2}{6-v_n}}$.

Or, d'après la question précédente, $0 < v_n < 3$ pour tout n entier naturel, ainsi $6 - v_n$ est positif, donc $v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n-3)^2}{6-v_n} > 0$, ainsi la suite (v_n) est **croissante**.

(c) Comme la suite est majorée par 3 et croissante, alors elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 3.

Partie B

1. Pour tout n, $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1}-3} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{6-v_n}{3v_n-9} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{6-v_n-3}{3v_n-9} = \frac{v_n-3}{3v_n-9} = \boxed{-\frac{1}{3}}$.

   ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $\boxed{r = -\frac{1}{3}}$.

2. $w_n = w_0 + nr = \frac{1}{1-3} - \frac{1}{3}n = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n}$.

   Comme $w_n = \frac{1}{v_n-3}$, on a $v_n = \frac{1}{w_n} + 3 = \frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}n} + 3 = \frac{6}{-3-2n} + 3$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6}{-3-2n} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3}$.

IV Antilles-Guyane juin 2013

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc, par opérations $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + e^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc, par opérations $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = 1e^x + (x+1)e^x = \boxed{(x+2)e^x}$.

3. Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. (a) On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x+1 = me^x \\ &\iff (x+1)e^x = m \\ &\iff \boxed{f(x) = m}. \end{aligned}$$

   (b) D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :

   — si $m < -\frac{1}{e^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc $\mathscr{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses ;

   — si $m = -\frac{1}{e^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point ;

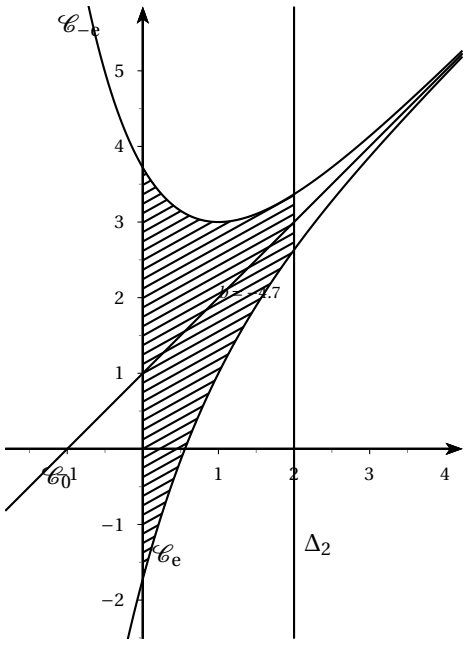
   — si $-\frac{1}{e^2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;

   — si $m \geqslant 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

2. — La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.
La seule possibilité est donc que $\boxed{m = -\mathrm{e}}$.
— La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ ou $m \geqslant 0$. La seule possibilité est donc $\boxed{m = 0}$.
— Par élimination, la courbe 3 correspond à $\boxed{m = \mathrm{e}}$.

3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -m\mathrm{e}^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
— si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est en dessous de $\mathscr{D}$;
— si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$;
— si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = 00$, donc $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ sont confondues.

4. Le domaine D_2 hachuré :



(a)

(b) Pour tout $a \geqslant 0$, la courbe $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ est au dessus de $\mathscr{C}_\mathrm{e}$, par conséquent l'aire $\mathscr{A}(a)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(a) &= \int_0^a f_{-\mathrm{e}}(x) - f_\mathrm{e}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \left((x+1) + \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right) - \left((x+1) - \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a 2\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a \\
&= 2\mathrm{e}\left(-\mathrm{e}^{-a} + 1\right) \\
&= 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}.
\end{aligned}$$

On a de plus $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{e}^{1-a} = 0$, par conséquent : $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = \boxed{2\mathrm{e}}$.

V Antilles-Guyane juin 2013

Partie A

On a :

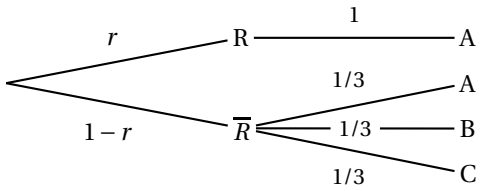
$$\begin{aligned}
f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\iff p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\iff -f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -p \leqslant -f + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\iff f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\iff p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$P\left(f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = P\left(p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 0{,}95$$

Partie B

1. (a) Arbre pondéré illustrant la situation :



(b) On a, d'après l'arbre précédent :

$$P(A) = P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R}) = r + \frac{1}{3}(1-r) = \frac{1}{3}(3r + 1 - r) = \boxed{\frac{1}{3}(1+2r)}.$$

(c) On a : $P_A(R) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(A)} = \dfrac{r}{\frac{1}{3}(1+2r)} = \boxed{\dfrac{3r}{1+2r}}$.

2. (a) L'expérience consiste en une répétition de 400 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, où la probabilité de « succès » (c'est-à-dire que l'étudiant ait la bonne réponse) est égale à $P(A)$. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = P(A) = \dfrac{1}{3}(1+2r)$.

(b) On a $n = 400$ et $f = \dfrac{240}{400} = 0{,}6$, donc $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$, un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p est donc :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \boxed{[0{,}55\ ;\ 0{,}65]}.$$

Ainsi, avec une probabilité supérieure à 95 % :

$$0{,}55 \leqslant p \leqslant 0{,}65$$

or $p = \dfrac{1}{3}(1+2r)$, donc :

$$0{,}55 \leqslant \frac{1}{3}(1+2r) \leqslant 0{,}65$$

d'où :

$$1{,}65 \leqslant 1 + 2r \leqslant 1{,}95$$

puis :

$$0{,}325 \leqslant r \leqslant 0{,}475$$

Un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r est donc : $\boxed{[0{,}325\ ;\ 0{,}475]}$.

(c) i. Ici $r = 0{,}4$, donc $p = \dfrac{1}{3}(1+2r) = \boxed{0{,}6}$.

La loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}6$ a pour espérance $np = 240$ et pour variance $V = np(1-p) = 96$. On peut alors l'approcher par la loi normale de paramètres $\mu = 240$ et $\sigma = \sqrt{96}$.

ii. Par lecture de la table fournie (ou utilisation de la calculatrice) :

$$P(X \leqslant 250) = \boxed{0{,}846}.$$