Correction

I Liban mai 2015

$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

1. $\boxed{u_0 = \ln 2}$

2. (a) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1} + x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{n+1}}$ en utilisant la linéarité et en factorisant.

   (b) On en déduit $\boxed{u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2}$.

3. (a)

Initialisation	Affecter à u la valeur $\ln 2$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $\frac{1}{i} + u$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (b) On peut supposer que la suite est **décroissante** .

4. (a) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ car $x^n \geqslant 0$, $1+x \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$ sur $[0\,;1]$ (**positivité de l'intégrale**). Pour tout n, $\boxed{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$.
   La suite est donc **décroisssante**.

   (b) Pour tout n, $u_n \geqslant 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive.
   La suite est **décroissante**, **minorée** donc **convergente** vers un réel ℓ positif.

5. On appelle la limite de la suite ℓ. « En passant à la limite »dans l'égalité : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$, on obtient $2\ell = 0$ (par unicité de la limite) donc $\boxed{\ell = 0}$.

II Liban mai 2015

1. La tangente en 1 est bien la droite d'équation $y = \mathrm{e}x$; il suffit d'écrire l'équation de la tangente $y = f'(a)(x-a) = f(a)$ avec $a = 1$.

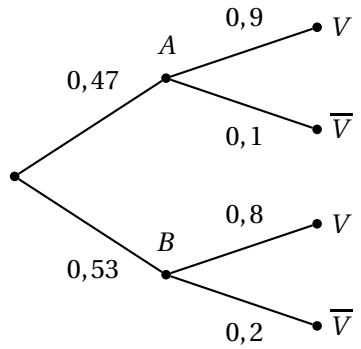
2. On conjecture qu'il y a :
   - 0 point d'intersection pour $0 \leqslant$ ù $< \mathrm{e}$.
   - 1 point d'intersection pour $m = \mathrm{e}$.
   - 2 points d'intersection pour $m = \mathrm{e}$

3. **Démonstration** : il faut considérer l'équation $f(x) = mx \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = mx \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - mx = 0$.
   On étudie alors la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - mx = 0$.
   - $g'(x) = \mathrm{e}^x - m$ qui s'annule en $\ln(m)$.
   - $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant \ln(m)$ et $g'(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant \ln(m)$.
   - Limites : facile en $-\infty$ et en faisant apparaître $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ en $+\infty$ (en $+\infty$, on utilise les croissances comparées).
   - Tableau de variation :

x	$-\infty$		$\ln(m)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$m(1-\ln(m))$	↗	$+\infty$

III Liban mai 2015

1. Arbre :



2. (a) Les événements A et B partitionnent l'univers donc d'après la formule des probabilités totales : $p(V) = p_A(V) \times p(A) + p_B(V) \times p(B) = \boxed{0,047}$.

   (b) $p_V(A) = \frac{p(A \cap V)}{p(V)} \approx \boxed{0,499}$

3. $p(\cap V) + p(B \cap \overline{V}) \approx \boxed{0,529}$.

4. L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est donné par : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec $f = 0,529$ et $n = 1\,200$.
   On vérifie que les conditions d'utilisation sont vérifiées : $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$. et on obtient : $\boxed{[0,5001\,;\,0,5579]}$.
   Au seuil de 95 %, avec la fourchette donnée par l'intervalle de confiance, le candidat A **peut croire** en sa victoire.

5. En une demi-heure, on répète 10 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité du succès (la personne accepte de répondre) est 0,4.
   La variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui répondent au cours de la demi-heure suit la **loi binomiale** de paramètres 10 et 0,4. On a $E(X) = np = 4$.
   Cela signifie que l'institut peut espérer obtenir 4 réponses par demi-heure.
   Du coup l'institut doit prévoir $\frac{1\,200}{4} = 300$ demi-heures en moyenne, soit **150 heures**.

IV Nouvelle-Calédonie mars 2015

1. (a) D'après l'énoncé la fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On a $\boxed{f_2'(x) = \mathrm{e}^x - 2}$.

   Or $\mathrm{e}^x - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$. Donc :

   Donc $\mathrm{e}^x - 2 > 0 \iff x > \ln 2$: la fonction f est décroissante sur $[-\infty\,;\,\ln 2[$.

   $\mathrm{e}^x - 2 < 0 \iff x < \ln 2$: la fonction f est croissante sur $[\ln 2\,;\,+\infty[$.

   $f_2(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} - 2\times\ln 2 = 2 - 2\ln 2$ est le minimum de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$.

   On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$2-2\ln 2>0$	↗	

   (b) Comme $2 - 2\ln 2 \approx 0,614 > 0$, le minimum de la fonction f_2 étant supérieur à zéro, on en déduit que la fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit

   $\mathrm{e}^x - 2x > 0 \iff \mathrm{e}^x > 2x$ donc la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est au dessus de la droite Δ_2.

   Γ et Δ_2 n'ont **pas de point commun**.

2. $f_a(x) = \mathrm{e}^x - ax$

   (a) • limite en plus l'infini :

   $f_a(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - a\right)$.

   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} - a = +\infty$, donc par produit des limites :

   $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty}$.

   • limite en moins l'infini :

   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

   Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$.

   (b) f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et

   $f_a'(x) = \mathrm{e}^x - a$.

   $\mathrm{e}^x - a = 0 \iff \mathrm{e}^x = a \iff x = \ln a$ (car $a > 0$).

   On a le même tableau de variations que pour f_2 en remplaçant 2 par a.

   (c) La fonction f_a décroissante, puis croissante admet donc un minimum $\boxed{f_a(\ln a) = a - a\ln a}$.

   (d) $a - a\ln a = 0 \iff a(1 - \ln a) = 0 \iff 1 - \ln a = 0$ (car $a \neq 0$) $\iff$

   $1 = \ln a \iff \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^{\ln a} \iff \boxed{\mathrm{e} = a}$.

   On a donc :

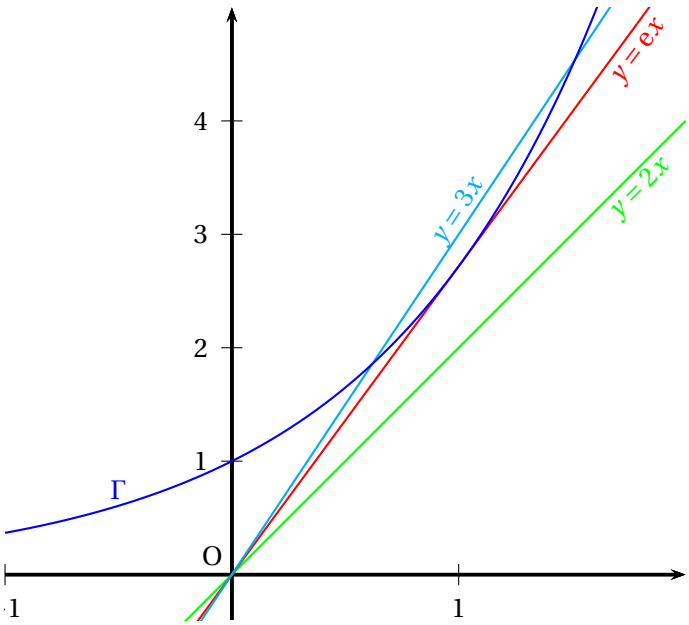
   • $a - a\ln a > 0 \iff a < \mathrm{e}$: le minimum est positif, donc comme à la question 1, la fonction f_a est strictement positive et la courbe et la droite n'ont pas de point commun.

   • $a - a\ln a < 0 \iff a > \mathrm{e}$: le minimum est inférieur à zéro.

x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$a - a\ln a$	↗	

   Donc sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln a[$, la fonction f_a continue car dérivable et strictement monotone sur cet intervalle passe d'une valeur positive à une valeur négative : il existe donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire un réel $\alpha \in]-\infty\,;\,\ln a[$ tel que $f_a(\alpha) = 0$, soit $\mathrm{e}^\alpha = a\alpha$.

   De même sur $]\ln a\,;\,+\infty[$, la fonction f_a continue car dérivable et strictement monotone sur cet intervalle passe d'une valeur négative à une valeur positive : il existe donc un réel $\beta \in]\ln a\,;\,+\infty[$ tel que $f_a(\beta) = 0$, soit $\mathrm{e}^\beta = a\beta$.

   Conclusion : si $a > \mathrm{e}$ la courbe Γ et la droite Δ_a ont **deux points communs**.

   • $a - a\ln a = 0 \iff a = \mathrm{e}$, la fonction $f_a = f_\mathrm{e}$ s'annule une seule fois en $x = 1$, donc $f_\mathrm{e}(1) = 0$: Γ et Δ_e ont un seul point commun (la droite est tangente à la courbe)