Correction des exercices

I Amérique du Nord, mai 2014

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
   $g(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = \boxed{\mathrm{e}^{-x}\left(5 - 3\mathrm{e}^{-x}\right)}$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ (positivité de l'exponentielle), $g(x)$ est du signe de $5 - 3\mathrm{e}^{-x}$.
   $5 - 3\mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow 5 > 3\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} > \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) > -x \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < x$ ce qui est toujours vrai car
   $\ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < 0 < x$.
   Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $\boxed{g(x) > 0}$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont un point commun d'abscisse x si et seulement si $f(x) = x - 3$ soit $g(x) = 0$ ce qui n'est pas possible car on vient de voir que $g(x) > 0$.
   La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont **pas de point commun**.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

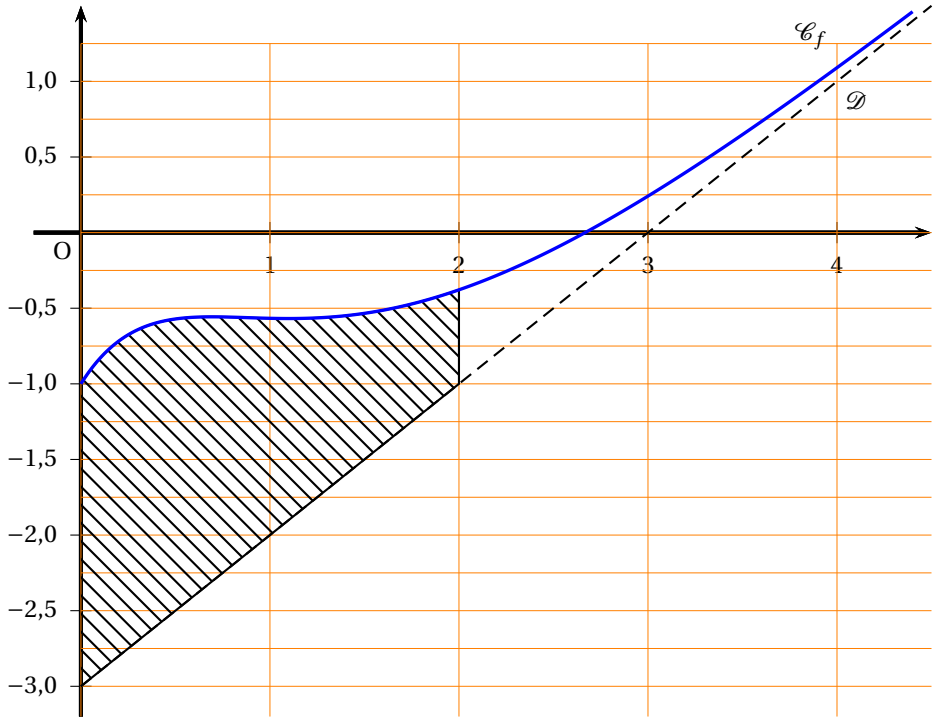
1. Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
   $MN = |\,f(x) - (x-3)\,| = |\,g(x)\,| = \boxed{g(x)}$ car $g(x) > 0$ d'après la première question.
2. Si u est dérivable, $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u$.
   La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est donc $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et celle de $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est $x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x}$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 2 \times 3\mathrm{e}^{-2x} = \boxed{6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x}}$.
3. g étant dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
   $$\begin{aligned} g'(x) \geqslant 0 \quad & \Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-x} - 5 \geqslant 0 && \text{on a divisé par } \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ & \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{5}{6} \\ & \Leftrightarrow -x \geqslant \ln\left(\frac{5}{6}\right) && \text{croissance de la fonction } \ln \\ & \Leftrightarrow \boxed{x \leqslant \ln\left(\frac{6}{5}\right)} \end{aligned}$$
   En $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right)$ est un **maximum** pour g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   $g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right) = 5 \times \mathrm{e}^{\frac{5}{6}} - 3 \times \left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)^2 = 5 \times \dfrac{5}{6} - 3 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{75}{36} = \boxed{\dfrac{25}{12}}$
   La distance entre un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et le point de même abscisse sur la droite $\mathscr{D}$ est donc maximale lorsque $x = \ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$.
   Cette distance maximale vaut $\dfrac{25}{16}$ unités.
   Remarque : Comme le repère est orthogonal (a priori pas orthonormé), il s'agit d'unité en ordonnée.)

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. $\mathscr{A}(2) = \int_0^2 [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t = \int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $g > 0$ sur $[0;2]$. $\mathscr{A}(2)$ mesure donc (en unités d'aires) l'aire du domaine limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$.



2. La fonction g est continue sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, la fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}' = g > 0$. La fonction $\mathscr{A}$ est donc bien **croissante** sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(x) &= \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 5\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= 5\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - 3\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x \\
&= 5\left(-\mathrm{e}^{-x}+1\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}\right) \\
&= 5 - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{7}{2}}$$

4. $\mathscr{A}(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{7}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2} = 0$

On pose $X = \mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned}
x \text{ solution de } \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2} = 0 \quad &\Leftrightarrow X \text{ solution de } \frac{3}{2}X^2 - 5X + \frac{3}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow X \text{ solution de } 3X^2 - 10X + 3 = 0 && \text{équation du second degré} \\
&\Leftrightarrow X = \frac{1}{3} \text{ ou } X = 3 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{3} \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 3 && \text{on revient à } x \text{ et } X = \mathrm{e}^{-x} \\
&\Leftrightarrow x = \ln 3 \text{ ou } x = -\ln 3 && -\ln\frac{1}{3} = -(-\ln 3) = \ln 3 \\
&\Leftrightarrow x = \ln 3 && \text{car } x \geqslant 0 \text{ et } -\ln 3 < 0
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathscr{A}(x) = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = \ln 3}$.

II Asie juin 2014

Pour n de $\mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit le nombre I_n par $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{x} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{x}$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0;1()$, $1+x^n > 0$ donc $f_n(x) > 0$.

   Donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{x}$ est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe représentant la fonction f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   D'après le graphique, cette aire tend à se rapprocher de 1 quand n tend vers $+\infty$.

2. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0;1]$:

   $0 \leqslant x^n \leqslant 1 \iff 1 \leqslant 1+x^n \leqslant 2 \iff \dfrac{1}{1} \geqslant \dfrac{1}{1+x^n} \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

   (b) Pour tout x de $]0;1[$, $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

   $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{x} \leqslant \int_0^1 1\mathrm{x} \iff I_n \leqslant [x]_0^1 \iff I_n \leqslant 1$$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x, $\left(x^n\right)^2 \geqslant 0$ donc $1-\left(x^n\right)^2 \leqslant 1$ ce qui équivaut à $\left(1-x^n\right)\left(1+x^n\right) \leqslant 1$ et comme $1+x^n > 0$ pour $x \in]0;1[$: $1-x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.

5. $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^n\right)\mathrm{x} = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] - 0 = \frac{n}{n+1}$

6. On a vu que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout réel x de $]0;1[$, $1-x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$. D'après la positivité de l'intégration, on peut en déduire que $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\mathrm{x} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{x}$ c'est-à-dire $\dfrac{n}{n+1} \leqslant I_n$.

   On a vu aussi que pour tout n, $I_n \leqslant 1$.

   Donc, pour tout n, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$.

   On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ ce qui équivaut à $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

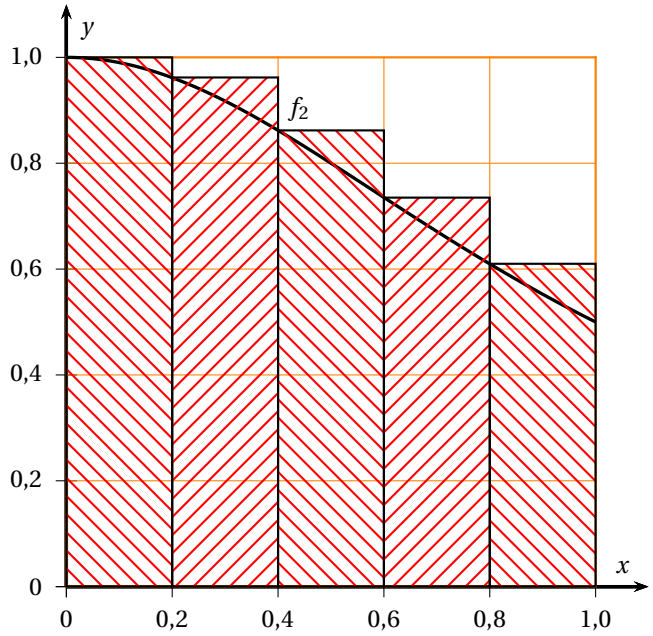
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$; donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et a pour limite 1.

7. (a) On fait tourner l'algorithme proposé avec $n = 2$ et $p = 5$:

k	x	I
0	0	0,2
1	0,2	0,392
2	0,4	0,565
3	0,6	0,712
4	0,8	0,834

   La valeur de I arrondie au centième qui sera affichée est 0,83.

   (b) Il faut reconnaitre dans l'algorithme proposé la méthode des rectangles permettant de calculer des valeurs approchées d'aire sous une courbe ; plus précisément, comme la fonction f_n est décroissante sur $]0;1[$, on obtient la somme de rectangles majorant l'intégrale I_n cherchée.



III Métropole juin 2014

Partie A

1. L'image de 0 par la fonction f_1 est : $f_1(0) = 0 + \mathrm{e}^{-0} = \boxed{1}$.
   Le point d'abscisse 0 sur la courbe $\mathscr{C}_1$, représentative de la fonction f_1, est le point de coordonnées $\big(0\,;\ f_1(0)\big)$, c'est à dire ici $(0\,;\ 1)$. Le point A, de coordonnées $(0\,;\ 1)$ est donc bien un point de la courbe $\mathscr{C}_1$.
2. La fonction f_1 est dérivable sur **R**, en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur **R**.
   Sa dérivée est définie sur **R** par :
   $f_1'(x) = 1 + (-1)\mathrm{e}^{-x} = \boxed{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.
   On a : $f_1'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x}$
   $\iff 1 \geqslant \mathrm{e}^{-x}$
   $\iff 0 \geqslant -x$, car ln est strictement croissante sur $]0\,;\ +\infty[$
   $\iff x \geqslant 0$.
   On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   Justifions maintenant les deux limites :
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$, et donc par somme :
   $\lim\limits_{+\infty} f_1 = \boxed{+\infty}$.
   Pour tout x on a : $f_1(x) = \mathrm{e}^{-x} \times \big(x\mathrm{e}^{x} + 1\big)$. Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées. On en déduit, par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} + 1 = 1$.
   Comme par ailleurs on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty$, on en déduit, par produit : $\lim\limits_{-\infty} f_1 = \boxed{+\infty}$.

Partie B

1. (a) Soit un entier naturel n non nul, et un réel x, choisi dans l'intervalle $[0\,;\ 1]$.
   x étant dans l'intervalle $[0\,;\ 1]$, x est positif. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on en déduit que e^{-nx} est également un nombre positif. La somme de deux nombres positifs étant elle-même positive, on en déduit que $f_n(x)$ est positif.

On a donc prouvé que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
I_n est donc l'intégrale sur un intervalle d'une fonction positive sur cet intervalle, c'est donc l'aire (exprimée en unité d'aire) de la portion de plan délimitée par : l'axe des abscisses ; la courbe $\mathscr{C}_n$, représentative de f_n, et les droites verticales d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) et $x = 1$.

(b) Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, il semble que, plus n augmente, plus les courbes $\mathscr{C}_n$ semblent se rapprocher du segment d'équation $y = x$, chaque courbe semblant être en dessous de la courbe d'indice précédent.
On en déduit que les aires successives sous ces courbes doivent être de **plus en plus petites**, et donc que la suite (I_n) doit être **décroissante**.
Comme de plus il semble que les courbes "s'écrasent" sur le segment d'équation $y = x$, à la limite, l'aire sous la courbe devrait tendre vers l'aire sous le segment, c'est à dire $\boxed{\frac{1}{2}}$.
On peut donc émettre la conjecture que la suite converge vers $\frac{1}{2}$ en décroissant.

2. On a : $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x, \text{ par linéarité de l'intégrale.}\\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - x - \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \boxed{\int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Ce qui est ce que l'on souhaitait démontrer.
On va maintenant en déduire le signe de cette différence.
Pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}$ est strictement positif, car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, quant au nombre $1 - \mathrm{e}^x$, il est négatif, car x étant dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a $x \geqslant 0$, et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, donc on en déduit que $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$, soit $\mathrm{e}^x \geqslant 1$, donc il suit que $1 - \mathrm{e}^x \leqslant 0$.

Le produit de deux nombres de signes contraires étant négatif, on vient de prouver que, pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right)$ est négatif.
L'intégrale entre deux bornes bien rangées d'une fonction négative étant négative, on en déduit que, pour tout entier n non nul, la différence $I_{n+1} - I_n$ est négative. On en déduit que la suite (I_n) est **décroissante**.
Comme par ailleurs, on a déjà prouvé que, pour tout n naturel non nul, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration $[0\,;\,1]$, on en déduit que l'intégrale de cette fonction positive entre des bornes (0 et 1) bien rangées est positive, donc cela signifie que pour tout n naturel non nul, I_n est positif. On a donc prouvé que la suite est $\boxed{\text{minorée par 0}}$.

(I_n) étant une suite minorée et décroissante, on peut en conclure qu'elle est **convergente** vers une limite $\ell \geqslant 0$, car la suite est minorée par 0.

3. Nous allons maintenant déterminer cette limite ℓ. Pour tout entier n naturel non nul, une primitive de f_n sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est définie par :
$F_n(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$. On a donc :
$I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = F_n(1) - F_n(0)$
$I_n = \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \left(\frac{1}{2} \times 0^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^0\right) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \times \left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)}$.
Comme on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-n} = 1$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par produit, puis par somme de limites, on en déduit :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \boxed{\frac{1}{2}}$.
Finalement, nos deux conjectures sont bien vérifiées : la suite est bien décroissante, et converge vers une limite qui est bien $\frac{1}{2}$, l'aire sous la droite d'équation $y = x$ entre les abscisses 0 et 1.