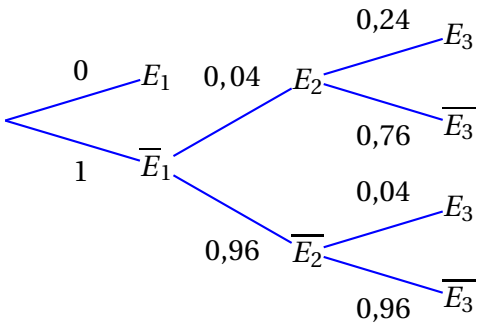
I Pondichéry avril 2013

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

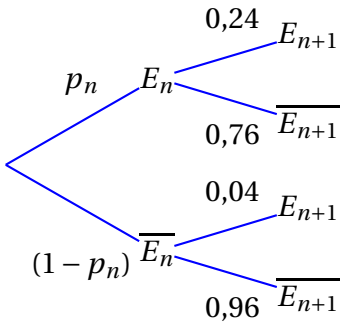
1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.



Théorème des probabilités totales :
$E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$ (union d'événements disjoints)
$p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04$
$= \boxed{0,048}$.

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine. $\mathrm{P}_{E_3}(E_2) = \dfrac{\mathrm{P}(E_2 \cap E_3)}{\mathrm{P}(E_3)} = \dfrac{0,04 \times 0,24}{0,048}$
$= \boxed{\dfrac{1}{5} = 0,2}$.

2. (a) Complétons l'arbre



(b) En appliquant le théorème des probabilités totales :
$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1}$ (union d'événemen
Pour tout n, $p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1-p_n)$
$= (0,24 - 0,04)p_n + 0,04 = \boxed{0,2p_n + 0,04}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01$
$= 0,2(p_n - 0,05) = \boxed{0,2u_n}$ donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $q = 0,2$.

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$
et donc : $p_n = u_n + 0,05 = \boxed{0,05\left(1 - 0,2^{n-1}\right)}$
.

(d) Limite de la suite (p_n).
Comme $|0,2| < 1$ alors par théorème : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \boxed{0,05}$.

(e) Le nombre J qui est affiché en sortie d'algorithme est le rang du premier terme de la suite (p_n) qui s'approche de la limite 0,05 à 10^{-K} près, où K est un entier fixé au départ.

La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite vue en (d) ou bien par le théorème de convergence monotone, puisque la suite (p_n) est croissante par hypothèse et majorée par 1 (car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant 1$).

3. (a) • Une semaine donnée, on peut définir une épreuve de Bernoulli, où le succès est l'évènement E « un salarié est absent pour maladie »
• L'état de chaque salarié étant supposé indépendant de l'état des autres, on obtient donc un Schéma de Bernoulli sur les

220 salariés de l'entreprise

• La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit, par propriété, la loi binomiale $\boxed{\mathscr{B}(220;0,05)}$.

Par propriété, $\mu = \mathrm{E}(X) = np = 220 \times 0,05 = \boxed{11}$ et
$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} \simeq \boxed{3,23}$

(b) La probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 » se note $\mathrm{P}(7 \leqslant X \leqslant 15)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{7-11}{3,23} \simeq -1,238 \\[2ex] \dfrac{15-11}{3,23} \simeq 1,238 \end{array}\right\}$$

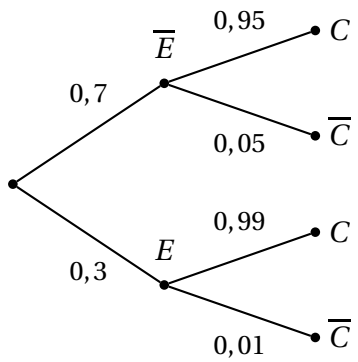
donc $\mathrm{P}(7 \leqslant X \leqslant 15) = \mathrm{P}(-1,24 < Z < 1,24)$

Au moyen de la table fournie :
$\mathrm{P}(-1,24 < Z < 1,24) = \mathrm{P}(Z < 1,24) - \mathrm{P}(Z < -1,24) = 0,892 - 0,108 = 0,784$ à 10^{-2} près, on a donc $\boxed{\mathrm{P}(7 \leqslant X \leqslant 15) \simeq 0,78}$.

II Liban mai 2013

Partie A

1.



2. On cherche $p(C \cap \overline{E}) = p_{\overline{E}}(C) \times p\left(\overline{E}\right)$
$= 0,95 \times 0,70 = \boxed{0,665}$

3. (D'après l ?arbre ci-dessus) :
$p(C) = p\left(C \cap \overline{E}\right) + p(C \cap E) = 0,665 + 0,99 \times 0,30 = \boxed{0,962}$.

4. $p_C(E) = \dfrac{p(E \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,99 \times 0,30}{0,962} \approx \boxed{0,309}$ à 10^{-3} près

Partie B

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,17\,;\,0,006^2\right)$.
On cherche à calculer la probabilité :

$$p(0,16 \leqslant X \leqslant 0,18) = 0,9044,$$

d'après la lecture de la table.

(a) Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}\left(0,17\,;\,\sigma_2^2\right)$.

(b) $0,16 \leqslant Y \leqslant 0,18 \Leftrightarrow \dfrac{0,16-0,17}{\sigma_2} \leqslant \dfrac{Y-0,17}{\sigma_2} \leqslant \dfrac{0,18-0,17}{\sigma_2}$ soit

$$\boxed{-\frac{0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sigma_2}}$$

Donc lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16\,;\,0,18]$, alors Z appartient à l'intervalle $\left[-\dfrac{0,01}{\sigma_2}\,;\,\dfrac{0,01}{\sigma_2}\right]$.

(c) On sait que cette probabilité doit être égale à $0,990$, le tableau donné permet d'obtenir

$$\boxed{\beta = 2,5758}$$

d'où

$$\frac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758 \Leftrightarrow \sigma_2 = \boxed{0,00385}$$

En conclusion, à 10^{-3} près, $\boxed{\sigma \approx 0,004}$.