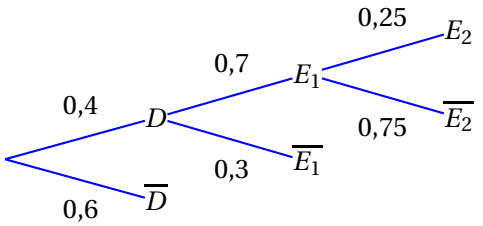
Correction des exercices

I Métropole juin 2012

1. (a)



(b) On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1)$
$= 0,4 \times 0,7 = \boxed{0,28}$.

(c) Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :
$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap \overline{E_2}\right)$
$= 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75$
$= 0,6 + 0,12 + 0,21 = \boxed{0,93}$. D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1 - p(F) = 1 - 0,93 = \boxed{0,07}$.
On peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :
$p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.
D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. (a) Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à 0,07. La variable X suit donc une loi binomiale $\boxed{\mathscr{B}(n = 5,\ p = 0,07)}$.

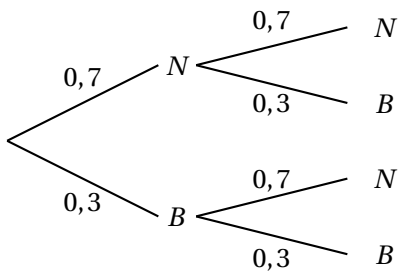
(b) On a $p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx \boxed{0,039 \text{ à } 10^{-3}}$ près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à 0,07.
La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à :
$\binom{0}{n} \times 0,07^0 \times 0,93^n = \boxed{0,93^n}$.
La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $\boxed{1 - 0,93^n}$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :
$1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln) $\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$.
Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx \boxed{95,1}$.
Il faut donc traiter $\boxed{\text{au moins } 96}$ dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

II Asie juin 2012

Partie A

1.



D'où : $p = P(G) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 \Rightarrow \boxed{p = 0,42}$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

(a) L'expérience aléatoire a deux issues :
— succès : le joueur gagne avec une probabilité de $p = 0,42$
— échec : le joueur perd avec une probabilité de $q = 1 - p = 0,58$

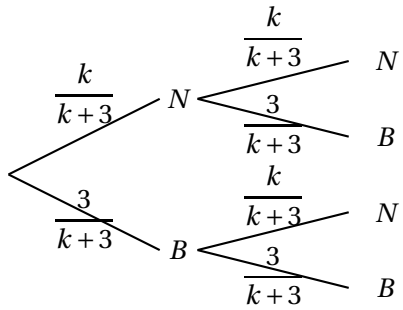
On répète cette expérience n fois de manière indépendante. Donc, **la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p**.

(b) $p_n = 1 - P(X = 0) = \boxed{1 - 0,58^n}$ $p_{10} = 1 - 0,58^{10} \approx \boxed{0,996}$

(c) $1 - 0,58^n \geqslant 0,99 \Rightarrow 0,01 \geqslant 0,58^n \Rightarrow \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,58^n\right) \Rightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \leqslant n$
le joueur doit jouer au moins $\boxed{9}$ parties.

Partie B

1. (a)



On en déduit que :
$p(Y_k = 5) = \dfrac{k}{(k+3)} \times \dfrac{3}{(k+3)} + \dfrac{3}{(k+3)} \times \dfrac{k}{(k+3)}$
donc $p(Y_k = 5) = \boxed{\dfrac{6k}{(k+3)^2}}$

(b)

$y_i =$	-9	-1	$+5$
$P(Y_k = y_i) =$	$\dfrac{9}{(k+3)^2}$	$\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$	$\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

2. $\mathrm{E}(Y_k) = -9 \times \dfrac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \dfrac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \dfrac{6k}{(k+3)^2} = \dfrac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} = \boxed{\dfrac{-(k-3)(k-27)}{(k+3)^2}}$
D'où :

$$\mathrm{E}(Y_k) > 0 \iff k \in]3\,;\,27[$$

Le jeu est favorable au joueur pour $\boxed{k \in]3\,;\,27[}$.