TS : Correction du contrôle sur la fonction exponentielle et les exponentielles complexes

I (1,5 point)

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \dfrac{e^x}{e^{3x}} = e^{x-3x} = \boxed{e^{-2x}}$

$B = \left(e^x\right)^3 = \boxed{e^{3x}}$

$C = \left(e^2\right)^3 \times e = e^6 \times e^1 = e^{6+1} = \boxed{e^7}$

II (2,5 points)

Résolvons les équations suivantes :

a) $e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

b) $e^x = -2$: $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$ (car, pour tout x, $e^x > 0$)

c) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

On pose $X = e^x$.

L'équation équivaut à $\begin{cases} X = e^x \\ X^2 + 3X - 4 = 0 \end{cases}$ Or $X^2 + 3X - 4 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X+4) = 0$ (1 est racine évidente). L'autre racine est -4

On doit donc avoir $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^x = -4$ qui n'a pas de solution.

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$

III (3 points)

Résolvons l'inéquation :

$$e^{\frac{1}{x}} \leqslant e^{\frac{x}{x+2}}$$

- L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,0\}$
- Pour $x \in \mathscr{D}$, $e^{\frac{1}{x}} \leqslant e^{\frac{x}{x+2}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{x}{x+2}$ (car la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante).

  Cela équivaut à $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2-x^2}{x(x+2)} \leqslant 0$.

  $x + 2 - x^2 = -x^2 + x + 2 = (x+1)(2-x)$ car -1 est un racine évidente.

  L'inéquation équivaut à : $\dfrac{(x+1)(2-x)}{x(x+2)} \leqslant 0$.

  Le numérateur s'annule pour $x = -1$ ou $x = 2$.
- On renseigne alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$		$-$		$+$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
Quotient		$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

- **Conclusion** :

  l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = -]\infty\,;\,-2[\cup[-1\,;\,0[\cup]2\,;\,+\infty[}$

IV (3 points)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x+1) = -\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = \boxed{0}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x+1) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = \lim\limits_{X\to} e^X = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$.

Par produit, on trouve : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{-x+1} = -\infty}$

c) On a une forme indéterminée :

$\forall x,\ \dfrac{x}{e^{x+1}} = \dfrac{x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$ (croissances comparées).

Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x+1}\right) = 0}$

d) $\forall x \neq 1,\ (x+1)e^{-x+1} = \dfrac{x+1}{-x+1} \times (-x+1)e^{-x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-x+1)e^{-x+1} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ (en posant $X = -x+1$ et en appliqnant les formules de croissances comparées).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{-x+1}\right) = -1$ car $\dfrac{x+1}{-x+1} = \dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{-1+\frac{1}{x}}$

Par produit, on trouve $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{-x+1} = 0}$

V (3 points)

1. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) = 1$ car la limite est le nombre dérivé de exp en 0

   $\left(\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ si la limite existe et est réelle}\right)$

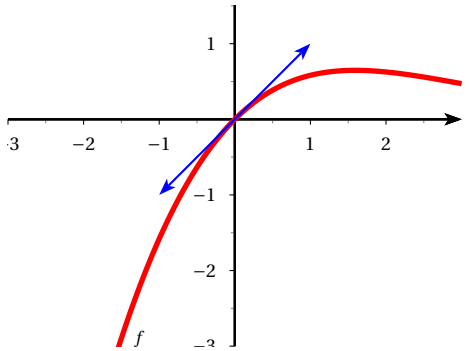
2. - Continuité : $\forall x \neq 0,\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^x-1} = x \times \dfrac{x}{e^x-1}$;

     $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{x}{e^x-1}\right) = 1$ d'après la question précédente, donc $\lim\limits_{x\to0} \left(x \times \dfrac{x}{e^x-1}\right) = 0$; or $f(0) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)}$: la fonction f est **continué en 0**.
   - Dérivabilité en 0 :

     $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{x}{e^x-1}$ d'où $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to O} \left(\dfrac{x}{e^x-1}\right) = 1$ d'après la première question.

     f est donc dérivable en 1 et $\boxed{f'(1) = 1}$

Voilà la courbe (non demandée) qui illustre les résultats :



VI (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (croissances comparées)

   • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x$ donc $\boxed{f'(x) = (x+1)e^x}$.

   $f'(x)$ est du signe de $x+1$, donc nul en -1, négatif pour $x \leqslant -1$ et positif pour $x \geqslant -1$.

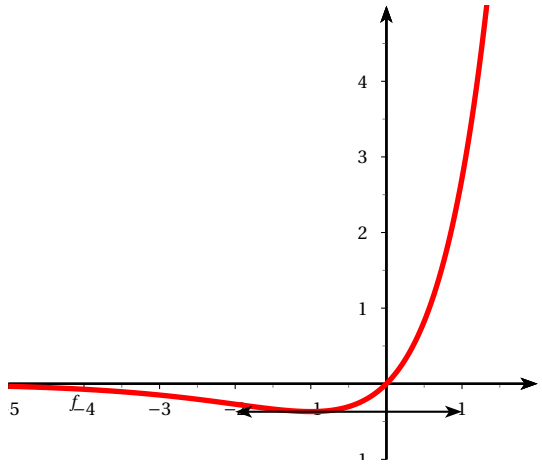
   f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1$ et croissante sur $[-1\ ;\ +\infty]$.

   $f(-1 = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e} \approx -0,4$

3.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗	$+\infty$

4. Courbe :



VII (3 points)

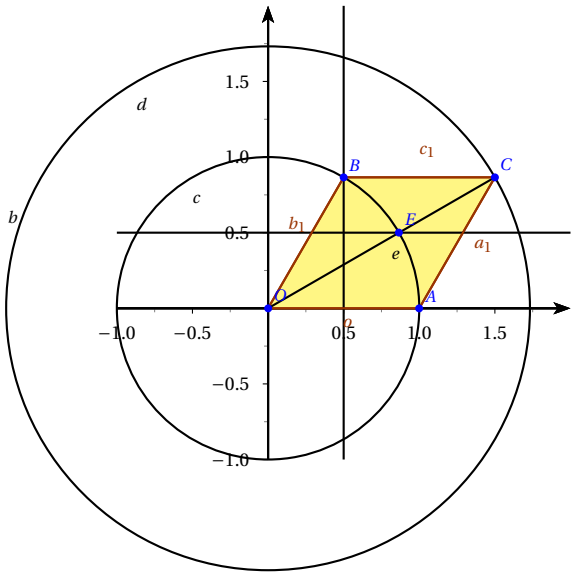
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (unité = 4 cm).
On note A, B, C et D les points d'affixes respectives

a=1 $\qquad b = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad c = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

1. $|c| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{-4}} = \sqrt{\dfrac{12}{4}} = \sqrt{3}.$

   Alors $c = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. (a) PB est sur le cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.
   $\arg(c) = \dfrac{\pi}{6}$ donc on place le point du cercle trigonométrique qui est sur la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$; alors C est sur l'intersection de la demi-droite [OE) et du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.



   (b) • $OA = 1$ (évident)
   • $OB = 1$ (évident)
   • $BC = 1$ (évident car ce sont des points de même ordonnée)
   • $AC = |c - a| = |\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}2i - 1| = |\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i| = 1$

   Les quatre côtés du quadrilatère OACB ont la même longueur, 1, donc c'est un **losange**.

VIII Racine n^{ième} de l'unité (2 points)

Il y avait quelques fautes de frappe dans l'énonce.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n^{ième} de l'unité tout nombre complexe tel que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n^{ième} de l'unité.
Par exemple : $\mathbb{U}_2 = \{-1\ ;\ 1\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = e^{2ik\pi} = 1$ donc c'est bien un élémernt de $\mathbb{U}_n$.
2. Réciproquement : soit $z = re^{i\theta}$.
   • $z^n = 1 \Rightarrow |z^n| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1$ donc $r^n = 1$ d'où$r = 1$.
   On en déduit $z = e^{i\theta}$.
   • $z^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{n}$.
   Les racines n^{ieme} de l'unité s'obtiennent en faisant varier $k$de 0 à $n-1$