Correction du baccalauréat blanc de mars 2015

I Nouvelle Calédonie mars 2011

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$.

1. $f(x) = x \iff x - \ln\left(x^2+1\right) = x \iff \ln\left(x^2+1\right) = 0 \iff x^2+1 = 1 \iff x^2 = 0 \iff \boxed{x = 0}$ (1)
2. f somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,1]$ est dérivable et sur cet intervalle :

   $\forall x \in [0\,;\,1],\ f'(x) = 1 - 2x \times \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \boxed{\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}}$.

   $\forall x,\ x^2+1 \geqslant 1 > 0$ et sur $[0\,;\,1]$, $(x-1)^2 \geqslant 0$, donc sur $[0\,;\,1]$, $f'(x) \geqslant 0$: la fonction est donc **croissante** sur $[0\,;\,1]$.

   $\boxed{f(0) = 0}$ et $\boxed{f(1) = 1 - \ln 2 < 1}$.

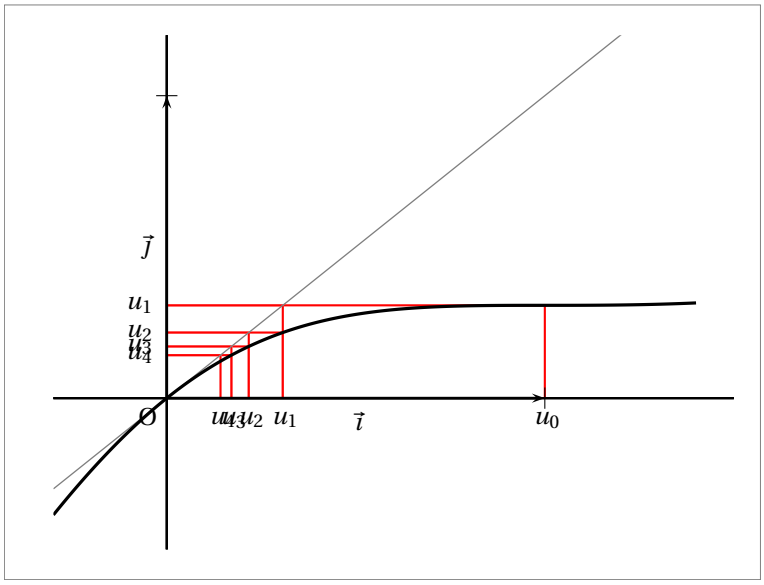
   On en déduit le **tableau de variation** de f :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$

   Toutes les images $f(x)$ appartiennent donc à l'intervalle $[0\,;\,1]$. (2,5)

Partie B

1. Conctruction des termes :



(1)

2. Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\,;\,1]$.
   - ***Initialisation*** : $u_0 = 1 \leqslant 1$, donc $u_0 \in [0\,;\,1]$.
   - ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \in [0\,;\,1]$; d'après la partie A, on a $u_{p+1} = f\left(u_p\right)$ et on a vu que si $u_p \in [0\,;\,1]$, alors $f\left(u_p\right) = u_{p+1} \in [0\,;\,1]$.

   D'après l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \in [0\,;\,1]}$. (2)
3. On a $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$
   Or $u_n \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2+1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0 \iff 0 \geqslant -\ln\left(u_n^2+1\right)$.
   Conclusion : quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite (u_n) est **décroissante**. (1,5)
4. La suite (u_n) est décroissante et tous ses termes sont minorés par 0 : elle est donc **convergente** vers une limite ℓ supérieure ou égale à 0.
   f est continue comme somme et composée de fonctions continues. On en déduit que ℓ est solution de l'équation $x = f(x)$, équation dont on a vu que la seule solution est 0.
   (u_n) converge donc vers 0. (2)

II Amérique du sud novembre 2013

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1. On résout l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$; $\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 < 0$.
   L'équation admet donc deux solutions **complexes conjuguées** :
   $z' = \dfrac{-\left(-2\sqrt{3}\right) + \imath\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2\imath}{2} = \boxed{\sqrt{3} + \mathrm{i}}$ et $z'' = \overline{z'} = \boxed{\sqrt{3} - \mathrm{i}}$. (1)
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\imath(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   (a) $z_1 = 2^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^1 \frac{\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} - \mathrm{i} = z''$
   Donc $\boxed{z_1 \text{ est solution de l'équation (E)}}$. (1)
   (b) $z_2 = 2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^2 \frac{\pi}{6}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \boxed{2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}}$.
   $z_3 = 2^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^3 \frac{\pi}{6}} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}} = 8\left(\cos\dfrac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{-\pi}{6}\right) = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \boxed{4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}}$. (1)
   (c)
   - $|z_1| = 2$ donc le point M_1 d'affixe z_1 est situé sur le cercle de centre O et de rayon 2 ; de plus, la partie imaginaire de z_1 est -1 donc le point M_1 est situé sur la droite d'équation $y = -1$.
   - Pour placer le point M_2, on utilise le fait que $|z_2| = 4$ et que $\mathrm{Im}(z_2) = 2$.
   - Pour placer le point M_3, on utilise le fait que $|z_3| = 8$ et que $\mathrm{Im}(z_3) = -4$.
   - $z_4 = 2^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^4 \frac{\pi}{6}} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$; pour placer le point M_4, on utilise le fait que $|z_4| = 16$; de plus $\arg(z_4) = \dfrac{\pi}{6} = \arg(z_2)$ donc les points O, M_2 et M_4 sont alignés donc $M_4 \in (OM_2)$. (1)
   - **Voir la figure en annexe**.
3. Si $n \geqslant 1$ et n pair, $(-1)^n = +1$, donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}$.
   Donc si $n \geqslant 1$ pair, $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}} = \boxed{2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}\right)}$.
   Si n impair, $(-1)^n = -1$, donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}$.
   Donc si n impair, $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}} = \boxed{2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}\right)}$.
   Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $\boxed{z_n = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}\right)}$ (2)
4. $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2\mathrm{i} - \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)\right| = \left|2\sqrt{3} + 2\mathrm{i} - \sqrt{3} + \mathrm{i}\right| = \left|\sqrt{3} + 3\mathrm{i}\right|$
   $= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3}}$
   $M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} - \left(2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right)\right| = \left|4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} - 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}\right| = \left|2\sqrt{3} - 6\mathrm{i}\right|$
   $= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = \boxed{2^2\sqrt{3}}$ (2)
   Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\boxed{M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}}$.
5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   (a) D'après la question 4, $\ell_n = 2\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} + \cdots + 2^n\sqrt{3} = \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right)\sqrt{3}$
   La suite $\left(2^n\right)$ définie pour $n \geqslant 1$ est **géométrique** de raison $q = 2$ et de premier terme $2^1 = 2$; la somme S de ses premiers termes consécutifs est donnée par la formule :
   $$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$
   donc $2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2 \times \dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2 \times \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 2\left(2^n - 1\right)$
   $\ell_n = \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right)\sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{3}\left(2^n - 1\right)}$ (1)

(b) $\ell_n \geqslant 1000 \iff 2\sqrt{3}\left(2^n-1\right) \geqslant 1000 \iff 2^n - 1 \geqslant \dfrac{1000}{2\sqrt{3}} \iff 2^n \geqslant \dfrac{1000}{2\sqrt{3}} + 1.$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$, donc

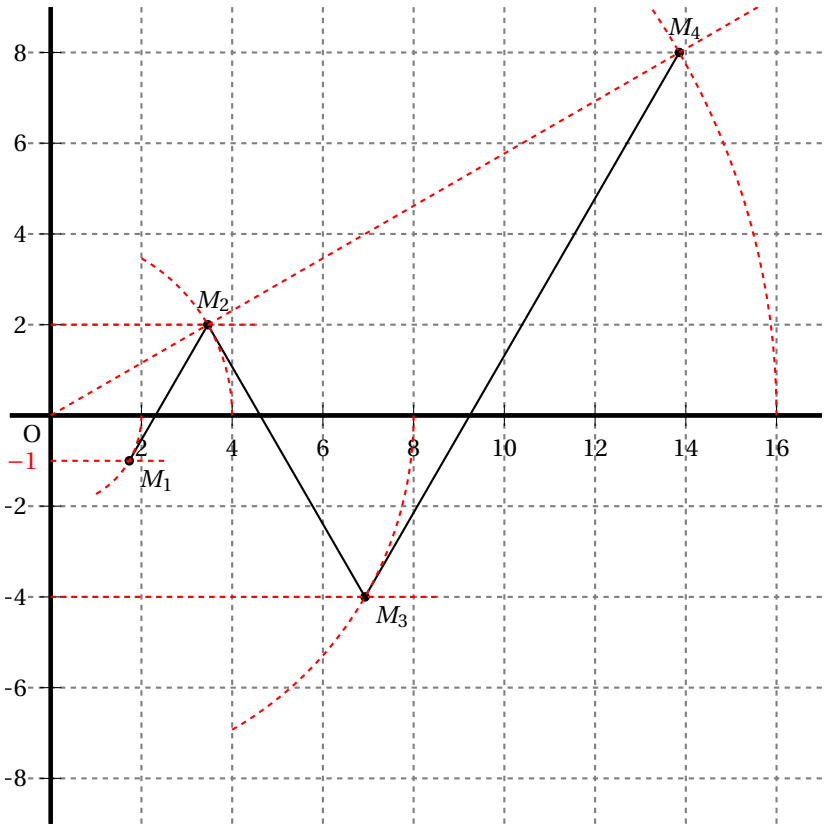
$\ell_n \geqslant 1000 \iff \ln\left(2^n\right) \geqslant \ln\left(\dfrac{1000}{2\sqrt{3}}+1\right) = \dfrac{500}{\sqrt{3}+1} \iff n\ln 2 \geqslant \ln\left(\dfrac{500}{\sqrt{3}}+1\right)$

Or $\ln 2 > 0$ donc

$\ell_n \geqslant 1000 \iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{500}{\sqrt{3}}+1\right)}{\ln 2} \iff \boxed{n \geqslant 8,18}$.

Le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1000$ est $\boxed{9}$.

On peut vérifier que $\ell_8 = 510\sqrt{3} \approx 883 < 1000$ et $\ell_9 = 1022\sqrt{3} \approx 1770 > 1000$. (1)



III Centres étrangers juin 2012

Partie A : Conjecture graphique

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Il semble y en avoir 2. L'une comprise entre -1 et 0, l'autre entre 0 et 1. (1)

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x^3 = x^2(1+x)$. Comme un carré est positif ou nul, x^2+x^3 est du signe de $1+x$.
   - $x^2+x^3 = 0$ pour $x \in \{-1\,;\,0\}$.
   - $x^2+x^3 > 0$ pour $x \in]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$.
   - $x^2+x^3 < 0$ pour $x \in]\infty\,;\,-1[$. (1)

   (b) x solution de $(E) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 3\left(x^2+x^3\right) \Leftrightarrow x^2+x^3 = \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$. Or, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{3} > 0$, alors que $x^2+x^3 < 0$ pour $x \in]\infty\,;\,-1[$. (E) n'a **pas de solution** sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

   (c) $\mathrm{e}^x = 1$ et $3 \times (0^2+0^3) = 0$. Donc $\boxed{\text{0 n'est pas solution de (E)}}$. (0,5)

2. $\forall x \in]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[, (E) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 3\left(x^2+x^3\right) \Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^x = \ln\left(3\left(x^2+x^3\right)\right)$
   $\Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln\left(x^2(1+x)\right) \Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x)$
   $\Leftrightarrow \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x = 0 \Leftrightarrow \boxed{h(x) = 0}$ (1,5)

3. (a) h est une somme et composée de fonctions de référence dérivables, donc h est bien **dérivable** sur $]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$.

   Si $u > 0$ sur un intervalle, alors $\ln u$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

Pour tout réel $x \in]-1\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$, $h'(x) = 0 + \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{2(x+1)+x-x(x+1)}{x(x+1)} = \boxed{\dfrac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}}$. (1,5)

(b) Pour étudier le sens de variations de h, on étudie le signe de sa dérivée.
Les numérateurs et dénominateurs sont des trinômes du second degré.
Pour le dénominateur, les racines sont 0 et -1, le coefficient du terme x^2 est $1 > 0$. Il est donc positif « à l'extérieur » des racines, négatif « entre » les racines (voir le tableau).
Pour le numérateur, pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant. On trouve : $\Delta = 12 > 0$ et les deux racines sont $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = \boxed{1-\sqrt{3}}$ et $x_2 = \boxed{1+\sqrt{3}}$. Le coefficient du terme x^2 est $-1 > 0$, d'où le signe (voir tableau)
Étude des limites aux bornes :

- Limite en -1
  $\lim\limits_{x\to-1} \ln x^2 = \lim\limits_{X\to1} \ln X = 0$
  $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = \lim\limits_{X\to0} \ln X = -\infty$
  $\lim\limits_{x\to-1} x = -1$
  Par somme : $\lim\limits_{x\to-1} h(x) = -\infty$
- Limite en 0
  $\lim\limits_{x\to0} \ln x^2 = \lim\limits_{X\to0} \ln X = -\infty$
  $\lim\limits_{x\to0} \ln(1+x) = \lim\limits_{X\to1} \ln X = 0$
  On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to0} h(x) = -\infty}$
- Limite en $+\infty$
  Pour $x > 0$, $h(x) = \ln 3 + 2\ln x + \ln(x+1) - x = \ln 3 + x\left[2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x+1}{x} \times \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} - 1\right]$.
  D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to=\infty} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ car $\dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} = 1$ On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty}$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ln 3 + (x+1)\left(\dfrac{2\ln x}{x+1} + \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}\right)$.

Pour avoir le tableau de variations complet, il nous faut encore les signes de $h\left(1-\sqrt{3}\right) < 0$ et $h(1+\sqrt{3}) > 0$ que l'on obtient avec la calculatrice.

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+2x+2$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$x(x+1)$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖	↗	≈ -0.11	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\approx 1,7$	↘	$-\infty$

(2)

(c) — Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $h(1-\sqrt{3})$ est un maximum pour h sur cet intervalle. Or $h(1-\sqrt{3}) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ **n'a pas de solution** sur $]-1\ ;\ 0[$, contrairement à la conjecture émise dans la partie A.

— Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1+\sqrt{3}[$ la fonction h est continue ; 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to0} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet donc au moins une solution sur $\left[0\ ;\ 1+\sqrt{3}\right[$.
Comme h est strictement monotone sur cet intervalle, cette solution α_1 est unique.
La calculatrice donne : $h(0,61) \approx -0,02$ et $h(0,62) \approx 0,24$.
0 est donc compris entre $h(0,61)$ et $h(0,62)$, le raisonnement précédent assure donc que $\boxed{\alpha_1 \in [0,61\ ;\ 0,62]}$.
Une valeur approchée de α_1, arrondie au centième est donc par exemple 0,61.

— Comme $h(1+\sqrt{3}) > 0$, 0 est aussi compris entre $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$. Le même raisonnement assure donc l'existence d'une autre solution dans cet intervalle. Voir le tableau.
Avec la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha_2 \approx 7,11}$, au centième près. (1,5)

4. La conjecture de la partie A est erronée. Il y a bien deux solutions mais pas celles envisagées ! (1)

IV Antilles-Guyane juin 2013

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$, donc, par opérations $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$, donc, par opérations $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0}$. (1,5)
2. Pour tout réel $x, f'(x)=1\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x=\boxed{(x+2)\mathrm{e}^x}$. (1)
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(1)

Partie B

1. (a) On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x)=0 &\iff x+1=m\mathrm{e}^x\\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^x=m\\ &\iff f(x)=m. \end{aligned}$$

(1,5)

   (b) D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :
   — si $m<-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x)=0$ ne possède aucune solution, donc $\mathscr{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses ;
   — si $m=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x)=0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point ;
   — si $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}<m<0$: l'équation $g_m(x)=0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;
   — si $m\geqslant 0$: l'équation $g_m(x)=0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un points. (2)
2. — La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x)=0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m<-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. La seule possibilité est donc que $m=-\mathrm{e}$.
   — La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ ou $m\geqslant 0$. La seule possibilité est donc $m=0$.
   — Par élimination, la courbe 3 correspond à $m=\mathrm{e}$. (2)
3. Pour tout réel x, $g_m(x)-(x+1)=-m\mathrm{e}^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
   — si $m>0$, alors pour tout réel x, $g_m(x)-(x+1)<0$, donc $\mathscr{C}_m$ est en dessous de $\mathscr{D}$;
   — si $m<0$, alors pour tout réel x, $g_m(x)-(x+1)<0$, donc $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$;
   — si $m=0$, alors pour tout réel x, $g_m(x)-(x+1)=00$, donc $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ sont confondues. (1)