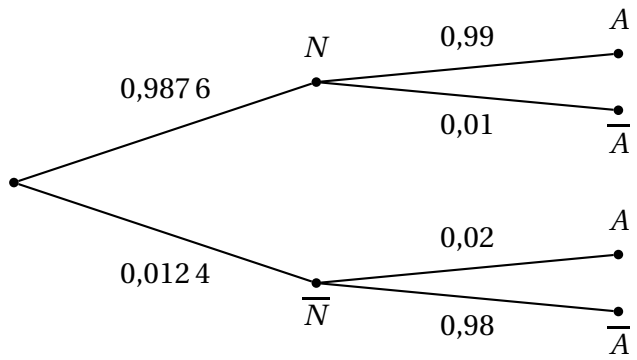
# TS1-TS2 : correction du contrôle commun n° 5

## I Nouvelle Calédonie novembre 2013

1. Une bille est dans la norme si son diamètre est entre 9 et 11 mm ; donc la probabilité qu'une bille soit dans la norme est $P(9 \leqslant X \leqslant 11) \approx 0,98758067$.
   La probabilité que la bille soit hors norme est donc : $1 - P(9 \leqslant X \leqslant 11) \approx \boxed{0,0124}$
   Une valeur approchée à 0,000 1 de la probabilité qu'une bille soit hors norme est alors :
   $1 - P(X \leqslant 11) \approx \boxed{0,0124}$.
2. (a) On construit un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé :




   (b) D'après la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} P(A) &= P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) \\ &= 0,9876 \times 0,99 + 0,0124 \times 0,02 = 0,977724 + 0,000248 = 0,977972 \\ &\approx 0,9780 \end{aligned}$$
   La probabilité de $A$ est $\boxed{0,9780}$ (arrondie au dix-millième).

   (c) On cherche : $P_A\left(\overline{N}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{N}\right)}{P(A)} = \dfrac{0,000248}{0,977972} \approx 0,0003$
   La probabilité qu'une bille acceptée soit hors norme est $\boxed{0,0003}$ (arrondie au dix-millième).

**Partie B**

1. La probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,0124 : on admet que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
   Donc la variable aléatoire $Y$ qui, à tout sac de 100 billes, associe le nombre de billes hors norme, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0124$.
2. L'espérance mathématique et l'écart type d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ sont respectivement $np$ et $\sqrt{np(1-p)}$.
   Donc $E(Y) = np = 100 \times 0,0124 = \boxed{1,24}$
   et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,0124 \times 0,9876} \approx \boxed{1,1066}$.
3. La probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme est $P(Y = 2)$.
   $P(Y = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \binom{100}{2} \times 0,0124^2 \times 0,9876^{98} \approx \boxed{0,2241}$ (se calcule directement à la calculatrice !).

4. Un sac de billes contient au plus une bille hors norme est l'événement $(Y \leqslant 1)$.

$$P(Y \leqslant 1) = P(Y=0) + P(Y=1)$$
$$= \binom{100}{0} \times 0{,}0124^0 \times 0{,}9876^{100} + \binom{100}{1} \times 0{,}0124^1 \times 0{,}9876^{99}$$
$$\approx 0{,}2871 + 0{,}3605 \approx \boxed{0{,}6476}$$ (se calcule directement à la calculatrice).

# II Métropole septembre 2013

**Partie A :**

1. Par lecture graphique, le signe de $f(x)$ est donné par :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

2. (a) On sait que $F$ est une primitive de $f$ donc , $F' = f$
$F'(0) = f(0) = 2$, $F'(-2) = f(-2) = 0$.

(b) $\mathscr{C}_3$ ne convient pas car la tangente au point d'abscisse 0 n'a pas pour coefficient directeur 2 :

Elle passe par $B(0\ ;\ -1{,}5)$ (environ) et $I(1\ ;\ 0)$ donc le coefficient directeur de cette tangente est $\dfrac{y_I - y_B}{x_I - x_B} = 1{,}5$, donc $\mathscr{C}_3$ ne convient pas.

$\mathscr{C}_2$ ne convient pas, la tangente horizontale semble plutôt concerner le point d'abscisse $(-0{,}5)$ de la courbe.

Il reste donc $\mathscr{C}_1$

**Partie B :**

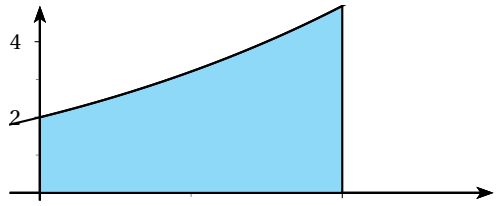
1. (a) $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \times \dfrac{1}{2}$ donc
$f'(x) = \dfrac{1}{2}(2+x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}$.

(b) On sait que la fonction exp ne prend que des valeurs strictement positives, donc $f'(x)$ est du signe de $(x+4)$, et donc le sens des variations de $f$ est donné par le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-2\mathrm{e}^{-2}$ | $\nearrow$ | |

Il y a donc bien un minimum en $x = -4$

2. (a) si $x > (-2)$, $f(x) > 0$ vu son expression, donc sur $[0\ ;\ 1]$ $f$ est positive, continue (car produit de fonctions continues), son intégrale sur $[0\ ;\ 1]$ est donc l'aire entre la courbe de $f$, l'axe des $x$ et les verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (en unité d'aire).




(b) $2(u(x)v'(x)+u(x)v'(x)) = 2\left(1\times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right) = (2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

Ainsi on voit bien que $f$ est une dérivée : $f=(2uv)'$ ; donc $(2uv)$ est une primitive de $f$.

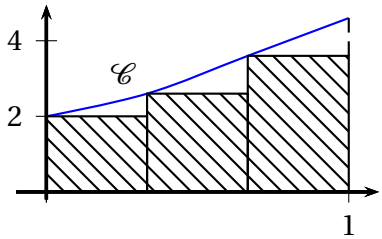
(c) L'intégrale $I$ se calcule à l'aide d'une primitive de $f$ donc $I=[2u(x)v(x)]_0^1=[2x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}]_0^1=2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\boxed{2\sqrt{\mathrm{e}}}$

3. (a) Faisons un tableau des valeurs successives de $k$ et $s$ pendant le déroulement de l'algorithme pour $n=3$ :

| | |
|---|---|
| Variables : | $k$ et $n$ sont des nombres entiers naturels. |
| | $s$ est un nombre réel. |
| Entrée : | Demander à l'utilisateur la valeur de $n$. |
| Initialisation : | Affecter à $s$ la valeur 0. |
| Traitement : | Pour $k$ allant de 0 à $n-1$ |
| | \| Affecter à $s$ la valeur $s+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. |
| | Fin de boucle. |
| Sortie : | Afficher $s$. |

| $k$ | $s$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0 | $0+\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)$ |
| 1 | $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$ |
| 2 | $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$ |

Le traitement est alors fini car $k$ a atteint la valeur $(3-1)$ ce qui a été suivi de la nouvelle valeur de $s$, l'affichage est alors $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$,
or chacun de ces trois termes est l'aire d'un des trois rectangles (largeur obtenue en divisant l'unité par $n=3$, leurs longueurs successives sont $f\left(\frac{0}{3}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ ; $f\left(\frac{2}{3}\right)$.




(b) D'une façon générale l'affichage de l'algorithme obtenu après $n$ boucles ( de $k=0$ à $k=(n-1)$) est la somme de $n$ termes qui sont de la forme $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ donc l'affichage est :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

c'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des $x$ entre $x = 0$ et $x = 1$, leur largeur vaut $\frac{1}{n}$.

Quand $n$ devient grand, $s_n$ se rapproche de $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (cours)

## III Métropole septembre 2014

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de $n$ minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

   (a) Comme 20 % du médicament est éliminé par minute, il en reste 80 % ; prendre 80 % d'un nombre c'est multiplier par 0,8 donc $\boxed{u_{n+1} = 0,8\,u_n}$.
   Donc la suite $(u_n)$ est **géométrique** de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = 10$.

   (b) La suite $(u_n)$ es géométrique, donc pour tout $n$, $u_n = u_0 \times q^n = \boxed{10 \times 0,8^n}$.

   (c) La quantité de médicament est inférieure à 1 % de la quantité initiale quand $u_n < \frac{1}{100} \times u_0$ c'est-à-dire $u_n < 0,1$.
   On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} u_n < 0,1 &\iff 10 \times 0,8^n < 0,1 \\ &\iff 0,8^n < 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,8^n\right) < \ln 0,01 && \text{croissance de la fonction ln sur } [0\,;+\infty] \\ &\iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 && \text{propriété de la fonction ln} \\ &\iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} && \text{car } \ln 0,8 < 0 \end{aligned}$$

   Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$ donc c'est au bout de **21 minutes** que la quantité de médicament dans le sang devient inférieure à 1 % de la quantité initiale.
   *On trouve à la calculatrice que* $u_{20} \approx 0,115 > 0,1$ *et* $u_{21} \approx 0,092 < 0,1$.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
   Pour tout entier naturel $n$, on note $v_n$ la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute $n$. L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute :

```
Variables :        n est un entier naturel.
                   v est un nombre réel.
Initialisation :   Affecter à v la valeur 10.
Traitement :       Pour n allant de 1 à 15
                   |  Affecter à v la valeur 0,8 × v.
                   |  Si v < 5 alors affecter à v la valeur v + 4
                   |  Afficher v.
                   Fin de boucle.
```

(a) Le tableau ci-dessous donne la quantité restante de médicament minute par minute :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | 10 | 8 | 6,4 | **5,12** | **8,10** | **6,48** | **5,18** | 8,15 | 6,52 | 5,21 | 8,17 | 6,54 | 5,23 | 8,18 | 6,55 | 5,24 |

- 6,12, car $6,40,8 = 5,12$
- $5,12 \times 0,8 = 4,096 < 5$, donc on ajoute 4, ce qui donne $8096 \approx 8,10$
- $8,10 \times 0,8 \approx 6,48$
- $6,48 \times 0,8 \approx 5,18$
- $5,18 \times 0,8 \approx 4,15$ donc on ajoute 4, ce qui donne 8,15.

(b) Les 15 premières minutes, le patient a absorbé 10 mL au début, puis 4 mL les minutes 4, 7, 10 et 13 soit 16 mL ; ce qui fait un total de **26 mL**.

(c) On programme la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

L'algorithme suivant affiche la quantité de médicament restant dans le sang minute par minute :

```
Variables :        n est un entier naturel.
                   v est un nombre réel.
Initialisation :   Affecter à v la valeur 10.
Traitement :       Pour n allant de 1 à 30
                     | Affecter à v la valeur 0,8 × v.
                     | Si v ⩽ 6 alors affecter à v la valeur v + 2
                     | Afficher v.
                   Fin de boucle.
```

3. On programme la machine de façon que :
   — à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
   — toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

   On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel $n$, on note $w_n$ la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de $n$ minutes.

   (a) Comme 20 % du médicament est éliminé chaque minute, il en reste 80 % donc on multiplie par 0,8. De plus, toutes les minutes, on rajoute 1 mL.
   On peut donc dire que, pour tout $n$, $\boxed{w_{n+1} = 0,8w_n + 1}$.

   (b) Pour tout entier naturel $n$, on pose $z_n = w_n - 5$, donc $w_n = z_n + 5$.
   Pour tout $n$, $z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8w_n + 1 - 5 = 0,8(z_n + 5) - 4 = 0,8z_n + 4 - 4 = \boxed{0,8z_n}$
   $z_0 = w_0 - 5$ ; or à l'instant 0, on injecte 10 mL donc $w_0 = 10$. On a donc $\boxed{z_0 = 5}$.
   La suite $(z_n)$ est donc **géométrique** de premier terme $z_0 = 5$ et de raison $q = 0,8$.

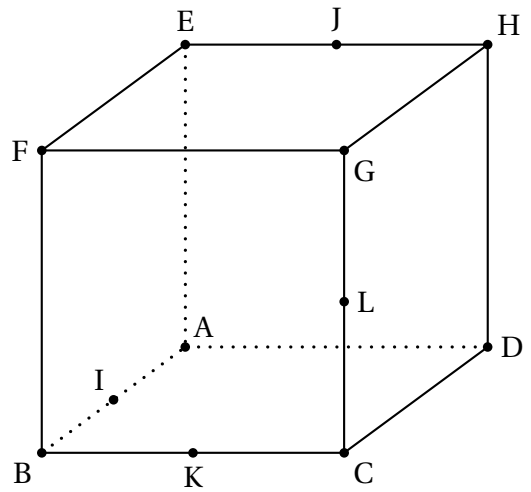
   (c) D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que, pour tout $n$ : $z_n = z_0 \times q^n = \boxed{5 \times 0,8^n}$.
   Or $w_n = z_n + 5$ donc, pour tout $n$, $\boxed{w_n = 5 \times 0,8^n + 5}$.

(d) La suite $(z_n)$ est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite $(w_n)$ est **convergente** vers 0. D'après les théorèmes sur les limites de suite, on peut en déduire que la suite $(w_n)$ est convergente et a pour limite $\boxed{5}$.

Cela veut dire que, si on poursuit ce traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient va se rapprocher de 5 mL.

## IV Liban mai 2015

ABCDEFGH est un cube.




I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Les coordonnées des différents points sont :

A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G( ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$, $J\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $K\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $L\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

1. (a) On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$. Il est clair que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ} = 0$ et $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IK} = 0$.

$\boxed{FD}$ est donc orthogonal à deux vecteurs con colinéaires $\boxed{IJ}$ et $\boxed{IK}$ du plan (IJK) ; c'est un vecteur normal à ce plan.

(b) On en déduit qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :

$-(x - x_I) + (y - y_I) + (z - z_I) = 0$ donc $-\left(x - \frac{1}{2}\right) + y - z = 0 \Leftrightarrow \boxed{-x + y - z + \frac{1}{2} = 0}$

2. $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur directeur de la droite (FD).
   Une représentation paramétrique de (FD) est donc :
   $\begin{cases} x = x_F - t \\ y = y_F + t \\ z = z_F - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ donc $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
3. M appartient à la droite (FD) donc ses coordonnées de calculent avec la représentation paramétrique ci-dessus. Comme M appartient aussi au plan (IJK), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne trouvée ci-dessus.
   On doit donc avoir :
   $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ -x + y - z + \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$.
   On en déduit $-(1-t) + t - (1-t) + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 3t - \dfrac{3}{2} = 0$ donc $\boxed{t = \dfrac{1}{2}}$.
   M a donc pour coordonnées $M\left( ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.
4. On sait que $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $IJ = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 1} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.
   $\boxed{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $IK = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ; $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $JK = \sqrt{2}$.
   $JK^2 = 2$ et $IJ^2 + IK^2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$.
   Par conséquent $JK^2 == IJ^2 + IK^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJM est rectangle en I.
   Son aire vaut alors $\dfrac{IJ \times IK}{2} = \dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$
5. Le volume d'un tétraèdre est $\dfrac{\text{Aire de base} \times \text{Hauteur}}{2}$.
   On a vu que la droite $(FD)$ était orthogonale au plan (IJK) donc la hauteur du tétraèdre est [FM].
   F(1 ; 0 ; 1) et $M\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$ donc $\boxed{FM}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $FM = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.
   Le volume du tétraèdre EIJM est donc $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$.

6. On remplace dans l'équation cartésienne de (IJK) $x$, $y$ et $z$ par les coordonnées de L : on vérifie ainsi que L appartient au plan (IJK).

   Les deux droites (IJ) et (KL) sont coplanaires. Elles sont donc soit parallèles, soit perpendiculaires.

   $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

   Il est clair que ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux droites sont sécantes.