TS : corrigé du contrôle sur les suites et démonstrations par récurrence

(2 heures)

I

Appelons P_n la proposition : $\boxed{9^n - 1 = 8k_n}$, avec $k_n \in \mathbb{Z}$.
Démontrons cette proposition par récurrence.

- **Initialisation** : $9^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 8k_0$ avec $k_0 = 0 \in \mathbb{Z}$.
  La proposition est vraie au rang $n = 0$
- **Hérédité** : on suppose la proposition vraie pour un rang n quelconque, donc $9^n - 1 = 8k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$.
  Alors : $9^{n+1} - 1 = 9 \times 9^n - 1 = 9 \times (8k_n + 1) - 1 = 8 \times 9k_n + 9 - 1 = 8 \times 9k_n + 8 = \boxed{8(9k_n + 1) = 8k_{n+1}}$ avec $k_{n+1} = 9k_n + 1 \in \mathbb{Z}$.
  La proposition est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la proposition est **vraie** pour tout n.

II

Soit P_n la proposition : $\boxed{2^n \geqslant n + 1}$.
Démontrons-la par récurrence :

- **Initialisation** : pour $n = 0$, $2^n = 2^0 = 1$ et $n/ + 1 = 0 + 1 = 1$ donc $2^n \geqslant n + 1$ pour $n = 0$.
- **Hérédité** : on suppose P_n vraie pour un entier n quelconque, donc $2^n \geqslant n + 1$.
  Alors : $2^n \geqslant n + 1 \Rightarrow 2 \times 2^n \geqslant 2(n + 1)$ en multipliant par 2.
  On en déduit $2^{n+1} \geqslant 2n + 2 = n + n + 2 \geqslant n + 2$ car $n \geqslant 0$ donc $2^{n+1} \geqslant (n + 1) + 1$.
  La proposition est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout n.

III

Calculer la somme :
$S = 3 + 7 + 11 + \cdots + 119 = \sum_{i=0}^{i=29} (3 + 4i)$.
C'est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 4$.
La somme contient 30 termes.
$S = \dfrac{30 \times (u_0 + u_{29})}{2} = \dfrac{30 \times (3 + 119)}{2} = 15 \times 122 = \boxed{1\,830}$

IV

voir cours

V

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(1 + u_n) \end{cases}$.

1. Montrons par récurrence que tous les termes de cette suite sont positifs.
   - **Initialisation** : $u_0 = 2 > 0$ donc le premier terme de la suite est positif.
   - **Hérédité** : On suppose que la propriété est vraie à un rang n quelconque, donc $u_n > 0/$
     Alors $1 + u_> 0$ et $u_> 0$ donc $u_n(1 + u_n) > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$. La proposition est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la proposition est vraie pour tout n.Tous les termes de la suite sont strictement positifs.

2. Pour tout n, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n > 1$ puisque $u_n > 0$ donc la suite (u_n) est **croissante**.

VI

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$:

$$w_0 = 1 \text{ et } n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1.$$

Le tableau ci-dessous donne les dix premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

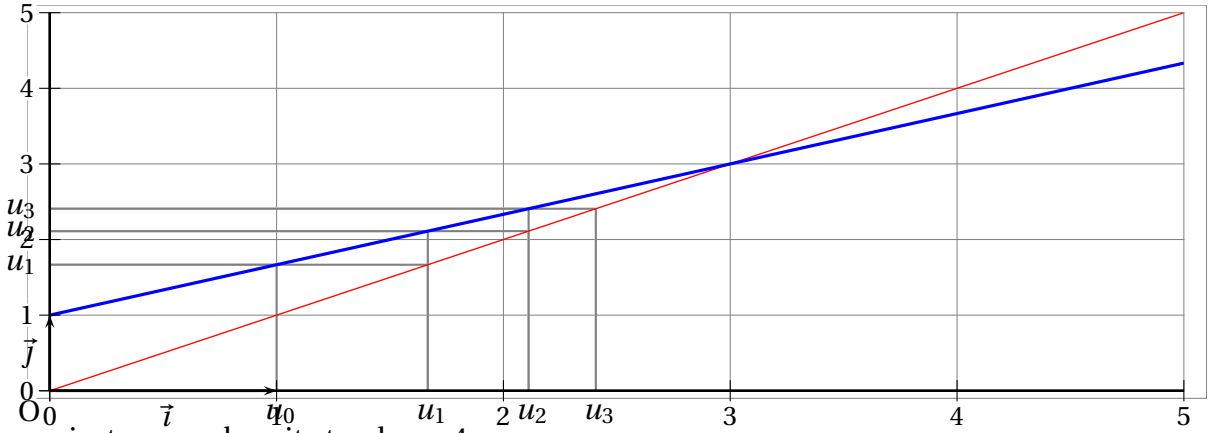
1. On remplace n par 10 : $10 w_{10} = 11 w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$ donc $w_{10} = \dfrac{210}{10} = \boxed{21}$.
2. On **conjecture** que $\boxed{w_n = 2n+1}$ donc que cette suite est **arithmétique**, de premier terme $w_0 = 1$ et de raison $r = 2$.
   Démontrons cette conjecture par récurrence.
   - Initialisation : $n = 0$: $2 \times 0 + 1 = 1 = w_0$ donc c'est vrai au rang 0.
   - Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n : $w_n = 2n+1$.
     On calcule alors w_{n+1} : d'après la définition de la suite (w_n), on a :
     $w_{n+1} = \dfrac{(n+2) w_n + 1}{n+1} = \dfrac{(n+2)(2n+1)+1}{n+1} = \dfrac{(2n^2+5n+3}{n+1} = \dfrac{(n+1)(2n+3)}{n+1} = 2n+3 = 2(n+1)+1.$
     La propriété est vraie au rang $n+1$ et elle donc héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_n = 2n+1}$.
3. On a donc $u_n = 2n+1$ pour tout n et $\boxed{u_{2000} = 4001}$

VII

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4}{3}$.

1. On a $u_1 = \boxed{2}$, $u_2 = \boxed{\dfrac{8}{3}}$ et $u_3 = \boxed{\dfrac{28}{9}}$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ (unités graphiques : 2 cm).
   (a) voir graphique ci-dessous
   (b) Voir graphique ci-dessous :



   (c) On conjecture que la suite tend vers 4.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 4$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \dfrac{2u_n+4}{3} - 4 = \dfrac{2u_n+4-12}{3} = \dfrac{2u_n-8}{3} = \dfrac{2(u_n-4)}{3} = \dfrac{2}{3}(u_n-4) = \dfrac{2}{3}v_n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$ donc la suite (v_n) est **géométrique**, de raison $q = \dfrac{2}{3}$.

   (b) On a $v_0 = u_0 - 4 = -3$.

   Comme (v_n) est géométrique, $v_n = v_0 q^n = -3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   Alors $\boxed{u_n = v_n + 4 = 4 - 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$

   (c) $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$.

VIII

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1} \end{cases}$

1. (a) On a successivement $u_1 = \boxed{\dfrac{4}{3}}$, $u_2 = \dfrac{3\times\frac{4}{3} - 2}{2\times\frac{4}{3} - 1} = \dfrac{2}{\frac{5}{3}} = \boxed{\dfrac{6}{5}}$. $u_3 = \dfrac{\frac{8}{5}}{\frac{7}{5}} = \boxed{\dfrac{8}{7}}$.

   (b) Pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n-2}{2u_n-1} = \dfrac{2u_n-1+u_n-1}{2u_n-1} = \dfrac{2u_n-1)}{2u_n-1} + \dfrac{u_n-1}{2u_n-1} = \boxed{1 + \dfrac{u_n-1}{2u_n-1}}$.

   (c) Montrons par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n :

   - **Initialisation** : $u_0 = 2 > 1$ donc c'est vrai au rang $n = 0$.
   - **Hérédité** : on suppose que $u_n > 1$ pour un rang n quelconque.
     Alors $u_n - 1 > 0$ et $2u_n - 1 > 0$ donc $dfracu_n - 12u_n - 1 > 0$d'où $1 + dfracu_n - 12u_n - 1 > 1$ c'est-à-dire $\boxed{u_{n+1} > 1}$.
     La propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, $u_n > 1$ est vrai pour tout n. Le dénominateur ne s'annule jamais donc la suite est définie pour tout n.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   (a) v_n est bien défini puisque $u_n > 1$.

   Pour tout n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}-1} = \dfrac{1}{1 + \frac{u_n-1}{2u_n-1} - 1} = \dfrac{1}{\frac{u_n-1}{2u_n-1}} = \dfrac{2u_n-1}{u_n-1} = \dfrac{2(u_n-1)+1}{u_n-1}$

   $= 2 + \dfrac{1}{u_n-1} = \boxed{2 + v_n}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2$ donc la suite (v_n) est **arithmétique**, de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = 1$.

   (b) On en déduit que $v_n = v_0 + nr = 1 + 2n$ donc $v_n = 2n + 1$.

   $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \Leftrightarrow u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2n+1}$ d'où $u_n = \dfrac{1}{2n+1} + 1 = \dfrac{2n+2}{2n+1} = \boxed{\dfrac{2(n+1)}{2n+1}}$