TS : correction du devoir sur feuille n° 5

I

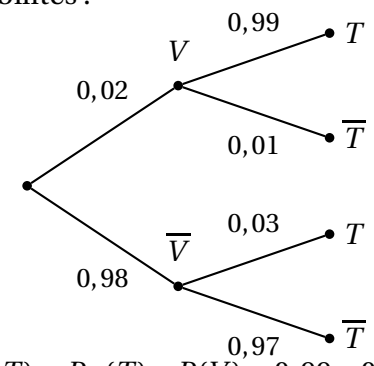
On souhaite déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale du nombre $A = 2^{12345}$.

- $\log(A) = 12345\log 2$ $\boxed{\approx 3716,2}$
- On en déduit que $\boxed{3716 \leqslant \log(A) < 3717}$.
- On en déduit $\boxed{10^{3716} \leqslant A < 10^{3717}}$
- Un nombre compris entre 10^n et 10^{n+1} s'écrit avec $n+1$ chiffres, donc A s'écrit en écriture décimale avec **3 717 chiffres**.

II

PARTIE A

1. (a) D'après l'énoncé, on a :
$\boxed{P(V) = 0,02}$; $\boxed{P_V(T) = 0,99}$
$\boxed{P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0,97}$.
Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



(b) $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0,99 \times 0,02$
$= \boxed{0,0198}$

2. Par conséquent :
$P(V) = P(V \cap T) + P\left(V \cap \overline{T}\right) = P_T(V) \times p(T) + P_{\overline{V}}(T) \times P\left(\overline{V}\right)$ (formule des probabilités conditionnelles).
Alors : $P(T) = 0,99 \times 0,02 + 0,03 \times 0,98 = \boxed{0,0492}$.

3. (a) Il faut calculer $P_T(V)$.
Or : $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0198}{0,0492} \approx 0,402$, soit environ 40%.
Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif.

(b) La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est $P_{(T)}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,97 \times 0,98}{1 - 0,0492} \approx 0,9997$, c'est-à-dire environ $\boxed{99,97\%}$.

PARTIE B

1. On a répétition de 10 épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la **loi binomiale** $\mathscr{B}(\mathbf{10}\,;\,\mathbf{0,02})$.

2. Pour tout k, $(0 \leqslant k \leqslant 10)$, on a
$\boxed{P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,02^k \times (1 - 0,02)^{10-k}}$.
Alors : $P(X \geqslant 2) = 1 - (P(X < 2)) = 1 - P(X \leqslant 1)$
$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$
$= 1 - \left[0,98^{10} + 10 \times 0,02 \times 0,98^9\right] \approx \boxed{0,016}$.

Remarque : $p(X \leqslant 1)$ peut se calculer directement à la calculatrice.

III

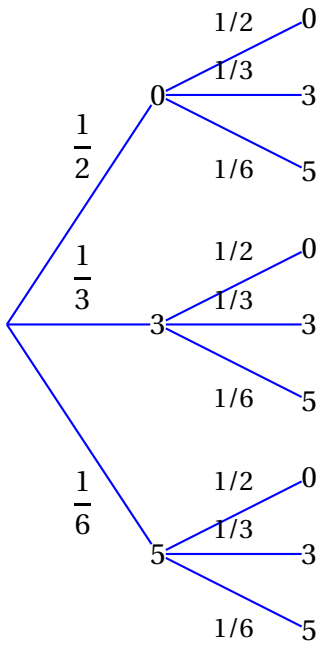
1. On a donc $p_3 = 2p_5$ et $p_0 = 3p_5$, donc
$p_0 + p_3 + p_5 = 1 \iff 3p_5 + 2p_5 + p_5 = 1 \iff 6p_5 = 1 \iff \boxed{p_5 = \dfrac{1}{6}}$.

Il en résulte que $p_3 = 2p_5 = 2 \times \dfrac{1}{6} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ et

$p_0 = 3p_5 = 3 \times p_0 = 3 \times \dfrac{1}{6} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

Remarque : il ne devait pas être très difficile de voir que les probabilités étaient proportionnelles à l'aire des secteurs, donc à des angles au centre de 180 ° (deux angles droits), un angle de 60 ° et un angle de 120 ° pour un total de 360 °.
On a donc $p_0 = \dfrac{180}{360} = \dfrac{1}{2}$, $p_3 = \dfrac{120}{360} = \dfrac{1}{3}$ et $p_5 = \dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}$ ...

2. (a)



On obtient un total d'au moins 8 points en deux lancers à la 6e, 8e et 9e branche. Donc $p(G_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \boxed{\frac{5}{36}}$.

(b) On a $p(P) = 1 - p(G_2) - p(G_3)$
$= 1 - \frac{5}{36} - \frac{7}{36} = \frac{36}{36} - \frac{12}{36} = \frac{24}{36} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

3. Les lancers sont indépendants ; on a une schéma de Bernoulli de paramètres $n = 6$ et de probabilité $p = \frac{2}{3}$.
La probabilité de ne gagner aucune partie est $\left(\frac{2}{3}\right)^6$, donc la probabilité de gagner au moins une partie est $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{3^6 - 2^6}{3^6} = \boxed{\frac{665}{729}}$

4. (a) On a le tableau de loi de probabilité de X suivant :

x_i	-2	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{24}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$

(b) $\mathrm{E}(X) = -2 \times \frac{24}{36} + 1 \times \frac{7}{36} + 3 \times \frac{5}{36} = \frac{-48+7+15}{36} = -\frac{26}{36} = \boxed{-\frac{13}{18} \approx -0,72\,€}$.
Un joueur perd en moyenne sur un grand nombre de parties 72 centimes par partie.
Le jeu est défavorable au joueur.

IV

Partie A

1. Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, il vient, $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_1(x) = 1}$
Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, il vient, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_1(x) = 0$
Graphiquement cela signifie que les droites d'équation $y = 0$ et $y = 1$ sont deux asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_1$ au voisinage respectivement de moins et plus l'infini.

2. $f_1(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times 1}{\mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^{-x})} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$

3. $f_1' = -\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}}$.
Cette expression étant toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en résulte que la fonction f_1 est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

4. $I = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1 + \mathrm{e}^x)\right]_0^1$
$= \ln(1 + \mathrm{e}) - \ln 2 = \boxed{\ln\left(\frac{1 + \mathrm{e}}{2}\right)}$.
I s'interprète graphiquement comme la mesure en unité d'aires du domaine limité par $\mathscr{C}_1$, l'axe des x et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. C'est l'aire du rectangle de côté 1 et de longueur $\ln\left(\frac{1 + \mathrm{e}}{2}\right)$ qui vaut à peu près 0,62 unité d'aire (ce qui se vérifie visuellement sur l'annexe).

Partie B

$P\big(x\,;\,f_1(x)\big)$ et $M\big(x\,;\,f_{-1}(x)\big)$. K est le milieu de $[MP]$.

1. $f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} + \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \boxed{1}$

2. $y_K = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$
Le point K est donc un point de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

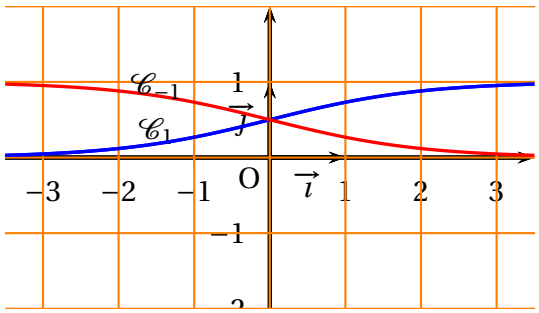
3. Il résulte de la question précédente que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

4. Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine considéré. Par symétrie entre les deux courbes, on obtient
$\mathscr{A} = 2\int_0^1 f_1(x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{d}x$
$= 2\ln\left(\frac{1 + \mathrm{e}}{2}\right) - 1 \boxed{\approx 0,24}$.

Partie C

1. **Vrai** : Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-kx} > 0 \Rightarrow 1+\mathrm{e}^{-kx} > 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}} < 1$.
2. **Faux** : On a vu que la fonction f_{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. **Vrai** : Car si $k \geqslant 10$ alors $-\dfrac{1}{2}k \leqslant -5$ puis $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k} \leqslant \mathrm{e}^{-5}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k} \leqslant 1+\mathrm{e}^{-5}$.
   Finalement :

$$0,99 < 0,993\,3 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{-5}} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k}} = f_k\left(\frac{1}{2}\right).$$



V

PARTIE A :

1. Soit $F : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.
   $F'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = [1+(x-1)]\,\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$ $= f(x)$ donc F est une **primitive** de f.
   Alors : $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \boxed{1}$.
2. (a) $\mathscr{A}(\mathrm{OAA'}) = \dfrac{1}{2}a \times a\mathrm{e}^a = \boxed{\dfrac{1}{2}a^2\mathrm{e}^a}$.
   $\mathscr{A}(\mathrm{ABB'A'}) = \dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}\right) \times (1-a)$
   $= \boxed{\dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right)}$.
   (b) Les segments [OA] et [AB] étant au dessus de la courbe $\mathscr{C}$ l'aire de la partie hachurée est égale à la somme des aires du triangle et du trapèze précédents diminuée de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$, soit :
   $\dfrac{1}{2}a^2\mathrm{e}^a + \dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right) - \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x =$
   $\dfrac{1}{2}\left(a^2\mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right) - 1$
   $= \boxed{\dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\right)}$.

PARTIE B :

1. Toutes les fonctions sont dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$, donc :
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} + x\mathrm{e}^x$.
   Puis $g''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \boxed{\mathrm{e}^x(2+x)}$.
2. On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, et sur $[0\,;\,+\infty[$, $2+x \geqslant 2 > 0$: donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $g''(x) > 0$: on conclut que la fonction g' est croissante (strictement) sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. On a $g'(0) = 1 - \mathrm{e} < 0$ et $g'(1) = \mathrm{e} > 0$.
   Donc la fonction g', continue, monotone croissante et croissante sur $[0\,;\,1]$ de $g'(0) < 0$ à $g'(1) > 0$ s'annule une seule fois sur cet intervalle, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
   Il existe donc un réel $\alpha \in [0\,;\,1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne : $0,5 < \alpha < 0,6$.
4. Sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$, $g'(x) < 0$: la fonction est donc décroissante sur cet intervalle.
   Sur l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty]$, $g'(x) > 0$: la fonction est donc croissante sur cet intervalle.
5. D'après tous les résultats précédents, l'aire de la surface hachurée est égale à : $\boxed{\dfrac{1}{2}g(a)}$.
   Or on a vu que la fonction g a sur sur $[0\,;\,+\infty[$ et également sur $[0\,;\,1]$ un minimum en $x = \alpha$.
   L'aire minimum est donc égale à : $\boxed{\dfrac{1}{2}g(\alpha)}$.
   Non demandé : cette aire vaut approximativement 0,088 2 unité d'aire.