TS : Correction du devoir sur feuille n° 3

I

Soit (u_n) une suite convergeant vers 2.
Pour tout intervalle $]2-\varepsilon\,;\,2+\varepsilon[$, il existe un entier p tel que $n > p \Rightarrow u_n \in\,]2-\varepsilon\,;\,2+\varepsilon[$.
On considère l'intervalle $I =]1,5\,;\,2,5[$, centré sur 2.

Il existe donc un entier p tel que, pour tout $n > p$, $u_n \in I$. Pour tout $n > p$, les termes u_n sont donc strictement positifs, puisqu'ils sont supérieurs à 1,5.

II

On rappelle que pour une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$ et que si v est dérivable et ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
Soit u une fonction qui ne s'annule pas sur un intervalle I et dérivable sur I ; soit n un entier naturel.

1. $\left(\dfrac{1}{u^n}\right) = \dfrac{1}{v}$ avec $v = u^n$.

   On en déduit : $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v' = nu'u^{n-1}$ d'après les rappels.

   Par conséquent : $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'u^{n-1}}{u^{2n}} = \boxed{-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}}$.

2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(3x^2+5x+3\right)^7}$. Le dénominateur ne s'annule pas (discriminant strictement négatif) donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $f = \dfrac{1}{u^n}$ avec $u(x) = 3x^2+5x+3$ et $n = 7$.

   Par conséquent : $f' = \left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$ avec $u'(x) = 6x+5$.

   $\boxed{f'(x) = -\dfrac{7(6c+5)}{\left(3x^2+5x+3\right)^8}}$.

III

1. Pour tout entier naturel n,
   $(n+1)! = (n+1) \times \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}_{n!}$
   $= \boxed{(n+1)n!}$.

2. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x$, d'après l'exercice II. On en déduit : $f'(x) = \boxed{-\dfrac{1}{x^2}}$.

   $f' = -\dfrac{1}{u^2}$. D'après II, $f'' = -\left(-\dfrac{2u'}{u^3}\right)$ donc $\boxed{f''(x) = \dfrac{2}{x^3}}$.

   $f'' = \dfrac{2}{u^3}$;

   d'après II, $f^{(3)} = \left(\dfrac{2}{u^3}\right)' = 2 \times \left(\dfrac{1}{u^3}\right)'$
   $= 2 \times \left(\dfrac{-3}{u^4}\right) = -\dfrac{6}{u^4}$. $\boxed{f^{(3)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}}$

   $f^{(3)} = -\dfrac{6}{u^4}$; d'après II, $f^{(4)} = \left(-\dfrac{6}{u^4}\right)'$
   $= -6 \times \left(\dfrac{1}{u^4}\right)' = -6 \times \left(\dfrac{-4}{u^5}\right) = \dfrac{24}{u^5}$.
   $\boxed{f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}}$.

   (b) **Conjecture** : pour tout $n \geqslant 1$,
   $\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}}$

   (c) On démontre cette conjecture par récurrence.
   - Initialisation : déjà faite en calculant les premiers termes
   - Hérédité : on suppose
     $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ pour un entier n.
     $f^{(n)} = (-1)^n \times n! \times \dfrac{1}{u^n}$, donc
     $f^{(n+1)} = (-1)^n \times n! \times \left(\dfrac{1}{u^{n+1}}\right)'$
     $= (-1)^n \times n! \times \left(-(n+1)\dfrac{u'}{u^{n+2}}\right)$
     $= (-1)^{n+1} \times \dfrac{(n+1!)}{u^{n+2}}$.
     Par conséquent
     $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \times \dfrac{(n+1!)}{x^{n+2}}$

   La propriété est donc héréditaire.
   D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

IV

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2+x-2}{(x+2)^3}.$$

1. $(x+2)^3 = 0 \Leftrightarrow (x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. (car un produit de facteurs dans $\mathbb{R}$ est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul ou parce que l'équation $X^3 = 0 \Leftrightarrow X = 0$ puisque la fonction $X \mapsto X^3$ est croissante)
   L'ensemble de définition de f est $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$.
2. f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme produit et quotient de fonctions dérivables.
3. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2+x-2$ et $v = w^3$ avec $w(x) = x+2$.
   $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 4x+1$ et $v = \left(w^3\right)' = 3w'w^2$ donc $v'(x) = 3\times 1\times (x+2)^2 = 3(x+2)^2$.
   $f'(x) = \dfrac{(4x+1)(x+2)^3 - 3(x+2)^2\left(2x^2+x-2\right)}{\left[(x+2)^3\right]^2}$
   $= \dfrac{(x+2)^2\left[(4x+1)(x+2) - 3\left(2x^2+x-2\right)\right]}{(x+2)^6}$
   $= \dfrac{-2x^2+6x+8}{(x+2)^4} = \dfrac{2\left(-x^2+3x+4\right)}{(x+2)^6}$.
   $-x^2+3x+4$ a une racine évidente, -1, donc se factorise par $x+1$:
   $-x^2+3x+4 = (x+1)(-x+4) = (x+1)(4-x)$.
   D'où : $\boxed{f'(x) = f'(x) = \dfrac{2(x+1)(4-x)}{(x+2)^4}}$
4. Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $(x+2)^4$ est positif, donc $f'(x)$ est du signe du numérateur.
   Celui-ci s'annule en -1 et 4 ; il est négatif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et positif entre les racines.
   On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-2]$, sur $]-2\,;\,-1]$ et sur $[4\,;\,+\infty[$ et croissante sur $[-1\,;\,4]$.
5. • Limite en $-\infty$: on a une forme indéterminée.
   $\forall x \neq 0,\ f(x) = \dfrac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\left[x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]^3}$
   $= \dfrac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)^3} = \dfrac{2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)^3}$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right) = 2$;
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$, donc
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3\right] = -\infty$
   d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ (en étant négatif).
   • Limite en $+\infty$: nous avons les mêmes calculs donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ (en étant cette fois positif, car $x > 0$).
   • Limite en -2 :
   $\lim\limits_{x\to-2}\left(2x^2+x-2\right) = 4$.
   $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(x+2) = 0$ avec $x+2<0$ donc
   $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(x+2)^3 = 0$ avec $(x+2)^3 < 0$.
   On en déduit $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty}$.
   De même $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty}$ car cette fois $(x+2)^3 > 0$
   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ et la droite d'équation $x = -1$.
6. Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
Ň(x)	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$\frac{17}{108}$	↘	$-\infty$

7. **Courbe $\mathscr{C}_f$: vir à la fin du corrigé**

V

Partie A :

1. $P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$
   $= -2\mathrm{i}\sqrt{2} + 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 4 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0$
   $\mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = \boxed{0}$.
2. (a) Développons : $\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) = z^3 + az^2 + bz - z^2\mathrm{i}\sqrt{2} - az\mathrm{i}\sqrt{2} - b\mathrm{i}\sqrt{2}$
   $= z^3 + \left(a-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + \left(b-a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - b\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a-\mathrm{i}\sqrt{2} &= -2-\mathrm{i}\sqrt{2} \\ b-a\mathrm{i}\sqrt{2} &= 2+2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b\mathrm{i}\sqrt{2} &= -2\mathrm{i}\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= -2 \\ b+2\mathrm{i}\sqrt{2} &= 2+2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b &= -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= -2 \\ b &= 2 \\ b &= 2 \end{cases}$$

On a donc $\boxed{P(z) = \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)}$

(b) En utilisant la factorisation précédente :

$P(z) = 0 \iff \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right) \iff$

$$\begin{cases} z-\mathrm{i}\sqrt{2} &= 0 \\ z^2-2z+2 &= 0 \end{cases}$$

On retrouve la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$; résolution de l'équation du second degré :

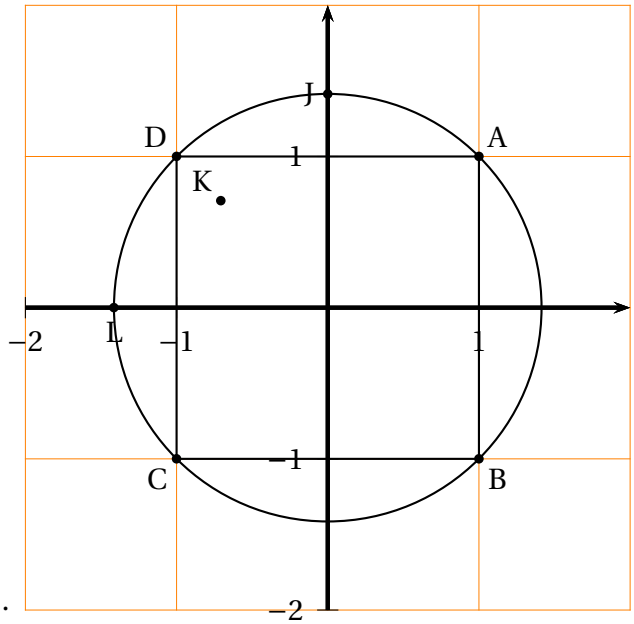
$z^2-2z+2=0 \iff (z-1)^2-1+2=0 \iff$
$(z-1)^2+1=0 \iff$

$(z-1)^2 = -1 \iff (z-1)^2 = \mathrm{i}^2 \iff$

$$\begin{cases} z-1 &= \mathrm{i} \\ z-1 &= -\mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} z &= 1+\mathrm{i} \\ z &= 1-\mathrm{i} \end{cases}$$

Les solutions sont donc : $\mathrm{i}\sqrt{2}$, $1+\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$.

Partie B :

1. 

2. On a $z_K = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
K est le milieu du segment [JL] ce qui se traduit en affixes par : $z_K = \dfrac{z_J+z_L}{2}$ d'où
$z_L = 2z_K - z_J = -\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2} - -\mathrm{i}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
Conclusion : $\boxed{z_\mathrm{L} = -\sqrt{2}}$.

3. On a $|z_\mathrm{A}|^2 = 1^2+1^2 = 2$
$|z_\mathrm{B}|^2 = 1^2+(-1)^2 = 2$
$\left|z_\mathrm{J}\right|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$
$|z_\mathrm{L}|^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2.$
On a donc OA = OB = OJ = OL = $\sqrt{2}$: les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et le rayon $\sqrt{2}$ (cela permet de placer J puisque $OA = OJ$).

4. (a) Un argument de z_J est $\dfrac{\pi}{2}$ et un argument de z_D est $\dfrac{3\pi}{4}$, donc l'angle de la rotation est $\dfrac{\pi}{4}$.

   (b) C est l'image de L par la rotation r donc $OC = OL = \sqrt{2}$.
   Un angle entre $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{OC}$ est $\dfrac{\pi}{4}$.
   On en déduit que $\dfrac{z_C}{z_L} = \dfrac{z_C-z_O}{s_L-z_O}$ a pour module 1 et argument $\dfrac{\pi}{4}$.
   Par conséquent : $\dfrac{z_C}{z_L} = \cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$
   $= \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$, d'où $z_C = z_L \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i} = -\sqrt{2}\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = -1-\mathrm{i}$, donc $\boxed{z_C = -1-\mathrm{i}}$

5. On a successivement :
O est milieu de [BD] et [AC], donc ABCD est un parallélogramme ;
$AC = BD = 2\sqrt{2}$ (car la diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$), donc ABCD est un rectangle ;
(AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc ABCD est un losange, donc finalement : ABCD est un **carré**.

VI

1. On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.
2. $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0}{3} = \dfrac{1 + i + \sqrt{2}}{3} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}i$. On a alors $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. (a) Pour $N = 2$, le tableau de l'état des variables dans l'algorithme est :

K	A	B
1	0,8047	0,3333
2	0,5586	0,1111

   (b) Plus généralement, pour une valeur de N saisie par l'utilisateur, l'algorithme affichera la valeur de a_N.

Partie B

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = a_{n+1} + \mathrm{i}b_{n+1}$ et $z_{n+1} = \dfrac{a_n + \mathrm{i}b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$, donc :

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}} \text{ et } \boxed{b_{n+1} = \frac{b_n}{3}}.$$

2. La suite (b_n) est **géométrique** de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{3}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

   Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, on en déduit que (b_n) **converge** vers 0.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1} = |\dfrac{z_n + |z_n|}{3}$
   $= \dfrac{1}{3}|z_n + |z_n| \leqslant \dfrac{1}{3}(|z_n| + |z_n|)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{|z_{n+1} \leqslant \frac{2|z_n}{3}}.$$

   (b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

   — On a $u_0 = |z_0 = \sqrt{2}$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
   — Supposons que, pour un certain entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$, alors :

$$u_{n+1} = |z_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}u_n \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2},$$

   la propriété est donc héréditaire.
   — En conclusion, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |z_n \geqslant 0$, donc : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = 0$, le théorème « des gendarmes » permet de conclure que la suite (u_n) **converge** vers 0.

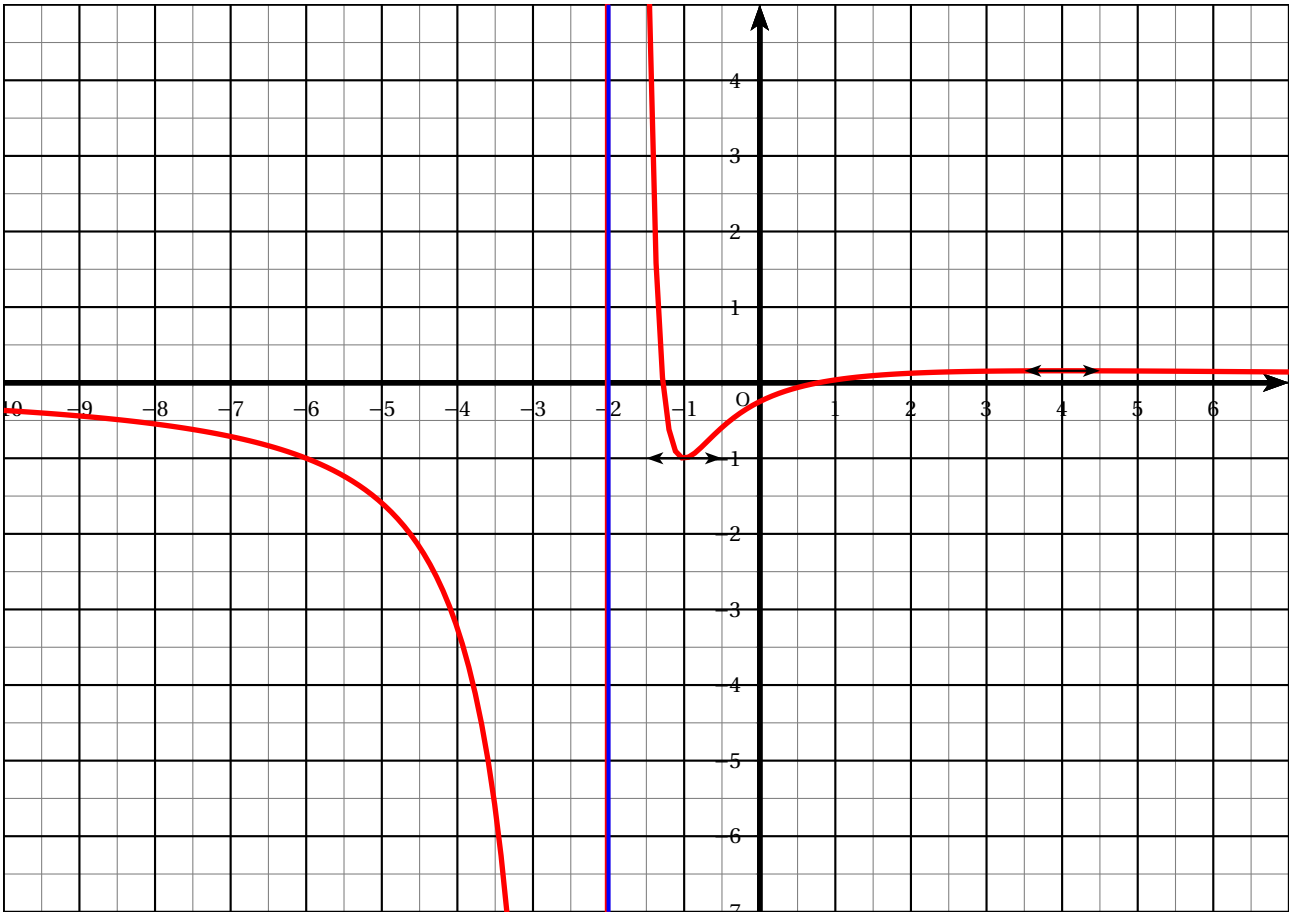
   (c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = |z_n| = \sqrt{a^n + b^n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = |a_n|.$$

   Ainsi, pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{0 \leqslant |a_n| \leqslant u_n}$. Comme (u_n) converge vers 0, le théorème « des gendarmes » permet à nouveau de conclure que $(|a_n|)$ **converge** vers 0, donc que (a_n) converge vers 0.

Code Algobox pour l'algorithme de l'exercice VI :

```
VARIABLES
A EST_DU_TYPE NOMBRE
B EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
K EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    A PREND_LA_VALEUR 1
    B PREND_LA_VALEUR 1
    LIRE N
    POUR K ALLANT_DE 1 A N
        DEBUT_POUR
        A PREND_LA_VALEUR (A+sqrt(pow(A,2)+pow(B,2)))/3
        B PREND_LA_VALEUR B/3
        FIN_POUR
    AFFICHER "La valeur de A est "
    AFFICHER A
FIN_ALGORITHME
```

Courbe de l'exercice IV

Il faut tracer les asymptotes et les tangentes horizontales en -1 et en 4 !