# Correction du devoir

## I Non convergence de la suite $\sin(n)$

1. On a : $\boxed{\cos 1 \approx 0,54}$ et $\boxed{\sin 1 \approx 0.84}$.

2. (a) Pour tous $a$ et $b$,
$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$ donc
$\boxed{\sin(n+1) = \cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1)}$.

   (b) $\sin(n+1) - \sin(n-1)$
$= \cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1) -$
$[\cos(1)\sin(n) - \cos(n)\sin(1)] = \boxed{2\sin(1)\cos(n)}$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin(n)$ et $v_n = \cos(n)$.
On suppose désormais que $(u_n)$ a une limite finie $\ell$.

   (a) • $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n-1) = \ell$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} [\sin(n+1) + \sin(n-1)] = \ell - \ell = 0$.

   • Pour tout $n$, $\sin(n+1) - \sin(n-1)$
$= 2\sin(1)\cos(n)$, donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} (2\sin 1 \cos n) = 0$.
Comme $\sin 1 \neq 0$, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = 0}$.

   (b) $\sin(n+1) = \cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1)$ (1.(a))
donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1) = \ell}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} [\cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1)] = \boxed{\ell \cos 1}$
car $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = 0$.
Par **unicité de la limite**, on a $\ell = \ell \cos 1$, d'où $\ell(1 - \cos 1) = 0$ ; comme $\cos 1 \neq 1$, on a $\boxed{\ell = 0}$.
Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0$ et
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

   (c) Pour tout $n$, $u_n^2 + v_n^2 = \sin^2 n + \cos^2 n = 1$ donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n^2 + v_n^2) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n^2 + v_n^2) = 0 + 0 = 0$
donc $1 = 0$, ce qui est faux.

   (d) On en déduit que l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ est fausse.
$\boxed{\text{La suite } (\sin n) \text{ n'a donc pas de limite.}}$

## II

### Partie A

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel $U$ et les entiers naturels $k$ et $N$.

**Entrée**
Saisir le nombre entier naturel non nul $N$.

**Traitement**
Affecter à $U$ la valeur 0
Pour $k$ allant de 0 à $N-1$

Affecter à $U$ la valeur $3U - 2k + 3$
Fin pour

**Sortie**
Afficher $U$

$N$ vaut 3, donc $k$ varie de 0 à 2.
Les valeurs successives de $U$ sont, après la valeur initiale 0 :

- $3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$ donc $U$ vaut $\boxed{3}$.
- $3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$ donc $U$ vaut $\boxed{10}$.
- $3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$ donc $U$ vaut $\boxed{29}$.

### Partie B

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3$
$u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 10$

2. (a) Démontrons par récurrence sur $n$ que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant n$.

   • **Initialisation :** $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

   • **Hérédité** : on suppose la propriété vraie au rang $n$, donc $u_n \geqslant n$.
Alors $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$ ; elle est donc héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n}$.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ d'après le théorème des gendarmes.

3. Pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geqslant 2n - 2n + 3 = 3 \geqslant 0$ (car $u_n \geqslant n$ d'après la question précédente).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite $(u_n)$ est **croissante**.

4. Soit la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = u_n - n + 1$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = (3u_n - 2n + 3) - (n+1) + 1$

$= 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = \boxed{3v_n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n$ : la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = v_n + n - 1 = \boxed{3^n + n - 1}$.

5. Soit $p$ un entier naturel non nul.

(a) Puisque la suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$, il existe un entier $n_0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

On s'intéresse maintenant au plus petit entier $n_0$.

(b) $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1$.
$p > 0$ (d'après l'énoncé) donc $p \geqslant 1$ ; par conséquent, $3p - 1 \geqslant 0$.
Alors : $27^p + 3p - 1 \geqslant 27^p \geqslant 10^p$, d'où $\boxed{n_0 \leqslant 3p}$.

(c) On sait d'après la question précédente, que $n_0 \leqslant 3p = 3 \times 3 = 9$.
¿ la calculatrice, on trouve $u_6 = 3^6 + 6 - 1 = 734$ et $u_7 = 2\,193 > 10^3$.
On en déduit $\boxed{n_0 = 7}$.

(d) Un algorithme serait de la forme :

- *Entrée* : Saisir le nombre entier naturel $n$
- *Traitement :*
  — Affecter à $k$ la valeur 0
  — Tant que $3^k + k - 1 < 10^p$
  — Affecter à $k$ la valeur $k + 1$
  Fin Tant que
- *Sortie :* Afficher la valeur de $k$

**Voici un algorithme avec Algobox :**

```
VARIABLES
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  U PREND_LA_VALEUR 0
  k PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (U<pow(10,p)) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR 3*U-2*k+3
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER k
FIN_ALGORITHME
```

## III

1.

| $n$ | $u$ | $v$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 9 | 4 | 9 |
| 1 | 6,5 | 6,964 | 6,5 | 6,964 |
| 2 | 6,732 | 6,736 | 6,732 | 6,736 |

2. (a) $\boxed{\text{Initialisation}}$
Pour $n = 0$, on a bien $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n = 0$.
$\boxed{\text{Hérédité}}$
Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
Alors :
$u_n + v_n > 0 \Rightarrow \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$
$u_n^2 > 0$ et $v_n^2 > 0 \Rightarrow u_n^2 + v_n^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} > 0 \Rightarrow$
$\sqrt{\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0 \Rightarrow v_{n+1} > 0$
L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $n + 1$.
Ainsi, d'après laxiome de récurrence, on en déduit que : $\boxed{u_n > 0 \text{ et } v_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

(b) $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)^2 = \dfrac{2u_n^2 + 2v_n^2}{4} - \dfrac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} = \dfrac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4} =$
$\boxed{\left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2 = v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2}$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geqslant 0 \Rightarrow v_{n+1}^2 \geqslant u_{n+1}^2 \Rightarrow v_{n+1} \geqslant u_{n+1} \Rightarrow v_n \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par construction, $v_0 \geqslant u_0$.

Conclusion : $\boxed{v_n \geqslant u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

3. (a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \geqslant 0$ d'après la question précédente. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissa}}$

(b) $0 < u_n \leqslant v_n \Rightarrow u_n^2 \leqslant v_n^2 \Rightarrow u_n^2 + v_n^2 \leqslant v_n^2 + v_n^2 \Rightarrow \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} \leqslant v_n^2 \Rightarrow \boxed{v_{n+1}^2 \leqslant v_n^2} \Rightarrow v_{n+1} \leqslant v_n$ (car les éléments de la suite $v_n$ sont positifs).

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc décroissante}}$.

4. On a montré que :
- la suite $u_n$ est croissante donc $u_0 \leqslant u_n$ pour tout entier naturel $n$,
- la suite $v_n$ est décroissante donc $v_n \leqslant v_0$ pour tout entier naturel $n$,
- pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant v_n$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ d'où en particulier $\begin{cases} u_n \leqslant v_0 \\ v_n \leqslant u_0 \end{cases}$

La suite $(u_n)$ est croissante majorée par $v_0$ donc, d'après théorème, elle est convergente.

La suite $(v_n)$ est décroissante minorée par $u_0$ donc, d'après théorème, elle est convergente.

## IV

On étudie la suite $u$ définie par
$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) = f(u_n)$ avec
$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

(a) $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x^2}\right)$.
$f'(x) = 0$ pour $x = \sqrt{3}$.
$x^2 - 3 \leqslant 0$ pour $0 < x \leqslant \sqrt{3}$ et $x^2 - 3 \geqslant 0$ pour $x \geqslant \sqrt{3}$. Le dénominateur $x$ est positif.
$f$ est décroissante sur $\left]0\,;\,\sqrt{3}\right]$ puis décroissante sur $\left[\sqrt{3}\,;\,+\infty\right[$.
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On en déduit le tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(b) Montrons par récurrence sur $n$ que, pour tout $n$, $u_n > \sqrt{3}$.
- Initialisation : $u_0 = 5 > \sqrt{3}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- On suppose la propriété vraie pour un rang $n$ quelconque, donc $u_n > \sqrt{3}$.
  D'après la question précédente, $f$ est croissante sur $\left[\sqrt{3}\,;\,+\infty\right[$, donc $\sqrt{3} < u_n \Rightarrow f\left(\sqrt{3}\right) < f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} > \sqrt{3}$
  La propriété est héréditaire

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n$ : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{3}$.

(c) Montrons par récurrence que la suite $(u_n)$ est décroissante, c'est-à-dire que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Initialisation : $u_1 = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{3}{5}\right) = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} < 5$ donc $u_1 - u_0 < 0$.
- Hérédité : on suppose $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour un rang $n$ quelconque. Par conséquent : $\sqrt{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
  $f$ est croissante sur $\left[\sqrt{3}\,;\,+\infty\right[$ donc $f(\sqrt{3}) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$, c'est-à-dire $\sqrt{3} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$donc $u_{n+2}—u_{n+1} \leqslant 0$.
  La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n$ : la suite $u$ est décroissante.

(d) La suite est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$, donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant \sqrt{3}$.

(e) $f$ est continue, donc $\ell$ est solution de l'équation $f(x) = x$.
$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) = x \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{2x} = x \Leftrightarrow x^2 + 3 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{3}$ qui a pour solutions $—\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
La lmite est positive, donc $\boxed{\ell = \sqrt{3}}$.

(f) Pour un autre nombre initial $u_0 \in \left]sqrt3\,;\,+\infty\right[$, la suite converge toujours vers $\sqrt{3}$.

(g) Pour $u_0 = \sqrt{3}$, la suite est constante et vaut $\sqrt{3}$, car $u_1 = f(\sqrt{3})\sqrt{3}$ et par récurrence, on montrerait facilement que tous les termes sont égaux à $\sqrt{3}(évident!)$.

(h) Si $u_0 \in ]0\,;\,\sqrt{3}[$, on a $u_1 = f(u_0) > \sqrt{3}$ (d'après le tableau de variation de $f$) et l'on est ramené à la situation du début de l'exercice, à partir de $n = 1$, donc la suite converge encore vers $\sqrt{3}$.

(i) Algorithme possible :

| Variables | $u$, $p$, $n$ |
|---|---|
| Affectations | $n = 0$<br>choisir $u$<br>choisir $p$ |
| Traitement | si $\lvert u - \sqrt{3}\rvert \leqslant 10^{-p}$, afficher $n$<br>Tant que $\lvert u - \sqrt{3}\rvert > 10^{-p}$,<br>$u = \frac{1}{2}\left(u + \frac{3}{u}\right)$<br>n=n+1 |
| Sortie | Afficier $n$ |