TS1-TS2 : correction du contrôle commun n° 3 (4 heures)

I Q.C.M. (5 points)

Pour toutes les questions, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$; z_A désigne l'affixe d'un point A, et z_B désigne l'affixe d'un point B.
Pour chaque question, il n'y a qu'une seule bonne réponse. Donner celle-ci et **justifier** votre choix.

1. Si $z = 4+3\text{i}$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4+3\text{i}} = \dfrac{4-3\text{i}}{4^2+3^2} = \dfrac{4-3\text{i}}{25} = \boxed{\dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{25}\text{i}}$.

2. Si $Z = \dfrac{4-\text{i}}{1+2\text{i}}$, alors Z est égal à $\dfrac{(4-\text{i})(1-2\text{i})}{1^2+2^2} = \boxed{\dfrac{2-9\text{i}}{5}}$.

3. Le conjugué de $Z = \dfrac{1-z}{1+\text{i}}$, où $z \in \mathbb{C}$, est égal à $\dfrac{\overline{1-z}}{\overline{1+\text{i}}} = \boxed{\dfrac{1-\overline{z}}{1-\text{i}}}$.

4. Soit $z = -3\left(\dfrac{1+\text{i}\sqrt{3}}{\text{i}}\right)$.

   On a $z = -3\left(\dfrac{1}{\text{i}} + \sqrt{3}\right) = -3(-\text{i}+\sqrt{3}) = 3(-\sqrt{3}+\text{i}) = 6\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 6\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$, donc un argument de z est $\boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$.

5. On sait que $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ et que $z' = -7$; alors $\arg\left(zz'\right) = \arg(z) + \arg\left(z'\right) = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}\ [2\pi] = \boxed{-\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]}$.

6. Soit n un entier naturel et soit $z = (1+\text{i}\sqrt{3})^n$.

   $\arg\left(z^n\right) = n\arg(z)\ [2\pi]$; or $z = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right)$ d'où $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$.

   z^n est réel si, et seulement si, $\arg\left(z^n\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow n \times \dfrac{\pi}{3} = 0\ [\pi] \Leftrightarrow n\dfrac{\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{n}{3} = k \Leftrightarrow n = 3k$, donc il faut et il suffit que $\boxed{\text{k soit un multiple de 3}}$.

7. On sait que $z_A = -3$ et que $z_B = 2\text{i}$; alors $AB = |z_B - z_A| = |2\text{i} - (-3)| = |3+2\text{i}| = \sqrt{3^2+2^2} = \boxed{\sqrt{13}}$.

8. Si $z_A = 1-3\sqrt{3}$ et $z_B = 1-3\text{i}$, alors l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$ a pour mesure $\arg\left(z_B - z_A\right) = \arg\left(1-3\text{i}-(1-3\sqrt{3})\right) = \arg\left(3\sqrt{3}-3\text{i}\right)$.

   Or $3\sqrt{3}-3\text{i} = 6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 6\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(z) = \boxed{-\dfrac{\pi}{6}}$.

9. Soit Δ l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-1| = |z+\text{i}|$. On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $-\text{i}$.

   $|z-1| = |z+\text{i}| \Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$.

   Δ est donc la médiatrice de $[AB]$.

   La droite Δ est alors la droite d'équation $\boxed{y = -x}$

10. Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\text{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

    On note $C(2\text{i})$ et $D(-2)$. Alors $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\text{i}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_M - z_D}{z_M - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CM}\,;\,\overrightarrow{DM}\right)$.

    Γ est donc l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{CM}\,;\,\overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

    C'est le cercle de diamètre $[CD]$; le centre de ce cercle est le milieu de [CD], donc d'affixe $-1+\text{i}$.

    Le rayon est $\dfrac{CD}{2} = \dfrac{|2+2\text{i}|}{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$.

II (5 points)

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

1. Écriture de $f(z)$ sous forme algébrique Avec $z = x + \mathrm{i}y$ (z et y réels) :

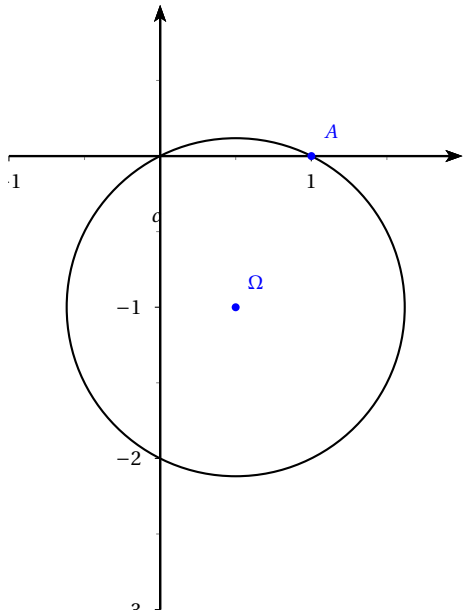
$$f(z) = \frac{2-\mathrm{i}z}{1-z} = \frac{2-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}{1-x-\mathrm{i}y} = \frac{2+y-\mathrm{i}x}{1-x-\mathrm{i}y} = \frac{(2+y-\mathrm{i}x)(1-x+\mathrm{i}y)}{(1-x+\mathrm{i}y)(1-x-\mathrm{i}y)} =$$

$$\frac{(2+y)(1-x)+xy+\mathrm{i}y(2+y)+\mathrm{i}(x(x-1)}{(1-x)^2+y^2} = \boxed{\frac{2-2x+y+\mathrm{i}\left(x^2+y^2-x+2y\right)}{(1-x)^2+y^2}}.$$

Ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit réel :

Si $z \neq 1$, soit $(x\,;\,y) \neq (1\,;\,0)$, c'est-à-dire $M \neq \mathrm{A}$, $f(z)$ existe et $f(z) \in \mathbb{R}$ si sa partie imaginaire est nulle soit d'après la question précédente si :

$x^2+y^2-x+2y=0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2-\frac{1}{4}-1=0 \iff \boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}}$, équation du cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, cercle privé du point A.



2. (a) Pour déterminer les antécédents de i par f on doit résoudre l'équation $f(z) = \mathrm{i}$; on obtient :

Pour $z \neq 1$: $f(z) = \mathrm{i} \iff \frac{2-\mathrm{i}z}{1-z} = \mathrm{i} \iff 2-\mathrm{i}z = \mathrm{i}-\mathrm{i}z \iff 2 = \mathrm{i}$ qui n'a pas de solution donc $\boxed{\text{i n'a pas d'antécédent par } f}$

Expression de z en fonction de z' ($z' \neq \mathbf{i}$) :

Si $z' \neq \mathrm{i}$, $f(z) = z' \iff \frac{2-\mathrm{i}z}{1-z} = z' \iff 2-\mathrm{i}z = z'-zz' \iff z(z'-\mathrm{i}) = z'-2 \iff z = \frac{z'-2}{z'-\mathrm{i}}$.

Conclusion : tout complexe z', distinct de i, admet, par f un unique antécédent z, tel que $\boxed{z = \frac{z'-2}{z'-\mathrm{i}}}$.

(b) De la relation $z = \frac{z'-2}{z'-\mathrm{i}}$ on déduit en prenant les modules :

$$|z| = \left|\frac{z'-2}{z'-\mathrm{i}}\right| = \frac{|z'-2|}{|z'-\mathrm{i}|}$$

ou encore, en notant C le point d'affixe 2, D le point d'affixe i et M et M' les points d'affixes z et z', $\boxed{\mathrm{O}M = \frac{\mathrm{C}M'}{\mathrm{D}M'}}$.

(c) Étude de M' lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1

Si le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé de A, on a OM = 1 et par conséquent d'après la question précédente :

$1 == \dfrac{\mathrm{C}M'}{\mathrm{D}M'}$: cette égalité signifie que M' appartient à la **médiatrice** (Δ) de [CD].

(d) Étude de M' lorsque M décrit l'axe réel

La relation $z = \dfrac{z'-2}{z'-\mathrm{i}}$ donne en termes d'arguments :

$\arg z = \arg(z'-2) - \arg(z'-\mathrm{i}) \quad (\mod .2\pi)$;

ou encore :

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{C}M'}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{D}M'}\right) \quad (\mod .2\pi) = \left(\overrightarrow{\mathrm{D}M'}, \overrightarrow{\mathrm{C}M'}\right)$.

Si M est un point de l'axe réel distinct de O et de A, on a

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right) = 0 \quad (\mod .\pi)$ donc

$\left(\overrightarrow{\mathrm{D}M'}, \overrightarrow{\mathrm{C}M'}\right) = 0 \quad \mod .\pi$.

Conclusion : le point M' appartient Ã la droite (CD) (il est distinct du point D et du point C).

II (5 points)

Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité

Partie A :

À chaque lettre de l'alphabet, on associe , grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Ét1pe 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Ét2pe 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Ét3pe 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Codons la lettre U : U correspond au nombre $m = 20$: $9\times 20+5 = 185 = 7\times 26+3$, donc le reste p de $9m+5$ modulo 26 est $p = 3$.

   La lettre U est donc codée par D

2. T$9\times 3 \equiv 1$ [26] donc on peut prendre $x = 3$

3. $9m+5 \equiv p$ [26] $\Longrightarrow 27m+15 \equiv 3p$ [26] $\Longleftrightarrow 27m \equiv 3p-15$ [26]

   Or $27 \equiv 1$ [26] donc $27m \equiv m$ [26]

   $\left.\begin{array}{l} 27m \equiv 3p-15 \\ 27m \equiv m \text{ [26]} \end{array}\right\} \Longrightarrow m \equiv 3p-15$ [26]

   Réciproquement :

   $m \equiv 3p-15$ [26] $\Longleftrightarrow m+15 \equiv 3p$ [26] $\Longrightarrow 9m+135 \equiv 27p$ [26]

   Or $27 \equiv 1$ [26] donc $27p \equiv p$ [26] ; de plus $135 = 5\times 26+5$ donc $135 \equiv 5$ [26].

   $135 \equiv 5$ [26] $\Longrightarrow 9m+135 \equiv 9m+5$ [26]

   $\left.\begin{array}{ll} 9m+135 & \equiv 9m+5 \text{ [26]} \\ 27p & \equiv p \text{ [26]} \\ 9m+135 & \equiv 27p \text{ [26]} \end{array}\right\} \Longrightarrow 9m+5 \equiv p$ [26]

   On peut donc dire que : $9m+5 \equiv p$ [26] $\Longleftrightarrow m \equiv 3p-15$ [26].

4. Si la lettre codée est B, on a $p = 1$; alors $m = 3p - 15\ [26] = -9\ [26] = 17\ [26]$ donc la lettre décodée est R.

Partie B :

On considère l'ensemble des matrices à deux lignes et deux colonnes.

On appelle matrice identité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

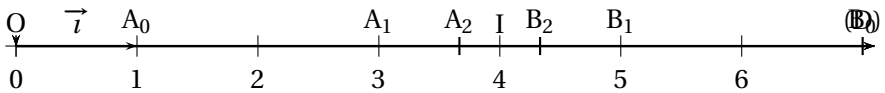
1. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times a + 0\times c & 1\times b + 0\times d \\ 0\times a + 1\times c & 0\times b + 1\times d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
2. On appelle matrice inverse la matrice M^{-1} définie par $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

   $M \times M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab=ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On peut calculer M^{-1} à condition que $ad - bc \neq 0$.
4. Si $M = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $M^{-1} = \dfrac{1}{4\times 3 - 2\times 5}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

III (5 points)

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1,\ b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$

1. On calcule $\boxed{a_1 = 3}$, $\boxed{b_1 = 5}$, $\boxed{a_2 = \dfrac{11}{3}}$, et $\boxed{b_2 = \dfrac{13}{3}}$.



2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$.

   (a) On a $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) - \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) = \dfrac{1}{3}(-a_n + b_n) = \dfrac{1}{3}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc une suite **géométrique** de raison $\boxed{\dfrac{1}{3}}$ et de premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = 7 - 1 = \boxed{6}$.

   (b) On sait que $u_n = u_0 \times r^n$ soit ici $u_n = 6 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \boxed{2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}$.

   (c) $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ onc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3. (a) Produit de deux facteurs supérieurs à zéro, u_n est $\boxed{\text{supérieur à zéro}}$.
   Or $u_n > 0 \iff b_n - a_n > 0 \iff b_n > a_n$.

   (b) **Variations de a_n :**
   Quel que soit n, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) - a_n = \dfrac{1}{3}(-a_n + b_n) = \dfrac{1}{3}u_n > 0$, d'après ci-dessus. On a donc $a_{n+1} - a_n > 0 \iff a_{n+1} > a_n$.

La suite (a_n) est donc **croissante**.

Variations de b_n :
On a de même quel que soit n, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - b_n = -\frac{1}{3}(b_n - a_n) = -\frac{1}{3}u_n < 0$.

On a donc $b_{n+1} - b_n < 0 \iff b_{n+1} < b_n$.
La suite (b_n) est donc **décroissante**.

Géométriquement : les points A_n se placent de gauche à droite, et les points B_n de droite à gauche, les premiers étant toujours à gauche des seconds.

(c) La suite (a_n) est croissante, majorée par b_0 donc convergente vers une limite ℓ ;

(d) la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0, donc convergente vers une limite ℓ'.

(e) La différence $b_n - a_n = u_n = 2 \times \frac{1}{3^{n-1}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. Les deux limites sont égales, donc $\ell = \ell'$.

Interprétation géométrique : les points A_n (par la gauche) et B_n (par la droite) se rapprochent du point I.

4. On définit la suite (v_n) par $v_n = a_n + b_n$.
Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + b_n = 8$.
   - Initialisation : $a_0 + b_0 = 8$ donc c'est vrai.
   - Hérédité : On suppose la propriété vraie à un rang n quelconque, donc $a_n + b_n = 8$.
   Alors : $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n + a_n + 2b_n) = \frac{1}{3}(3a_n + 3b_n) = a_n + b_n = u_n = 8$.
   La propriété est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.
   L'abscisse du milieu de $[A_nB_n]$ est $\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{8}{2} = 4 = x_I$ don tous les segments $[A_nB_N]$ ont pour milieu I.

IV Optimisation d'une aire (5 points)

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

1. **Intervalle d'étude :**
$\forall x \in [-2\ ;\ 2]$, $f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire. La courbe $\mathscr{C}$ est donc **symétrique** par rapport à O, donc on peut restreindre l'étude à $[0\ ;\ 2]$

2. **Dérivabilité de f :**

(a) Pour tout $x \in [0\ ;\ 2[$, $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x) - 0}{x - 2} = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = \frac{x\sqrt{(2-x)(2+x)}}{x - 2} = -\frac{x\sqrt{(2-x)(2+x)}}{2 - x} = -\frac{x\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}$.
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(2 - x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\sqrt{2 - x} = \sqrt{0} = 0$ avec $\sqrt{2 - x} > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x\sqrt{2 + x} = 4$
On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\infty$. On en déduit que $\mathscr{C}$ a une **tangente verticale en 2**.

(b) f est dérivable sur $[0\ ;\ 2[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
$f = u\sqrt{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = 4 - x^2$: $f' = u'v + uv'$.

$u'(x) = 1$: $v = \sqrt{w}$ avec $w(x) = 4 - x^2$: $v' = \dfrac{w'}{2w}$ donc $v'(x) = -\dfrac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

On en déduit $f'(x) = 1 \times \sqrt{4-x^2} + x \times \left(-\dfrac{x}{\underline{4-x^2}}\right) = \sqrt{4-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2\left(2-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}}$

$= \boxed{\dfrac{2\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)}{\sqrt{4-x^2}}}$.

(c) Comme $\sqrt{4-x^2}$ et $\sqrt{2}+x$ sont strictement positifs, $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}-x$, donc négatif pour $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ et négatif our $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Ň(x)	0	↗	2	↘	0

3. **Représentation graphique de f**

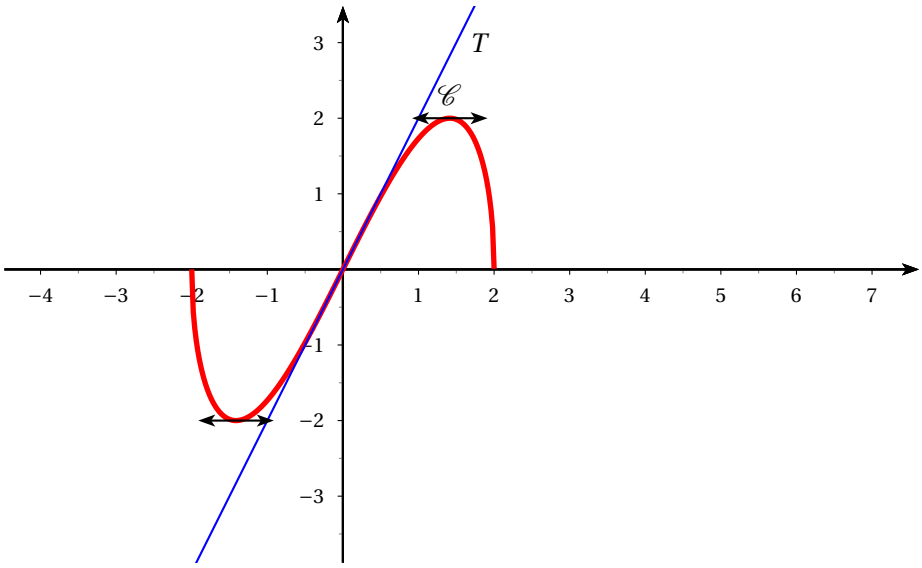
(a) Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, donc $y = \dfrac{2\left(2-a^2\right)}{\sqrt{4-a^2}}(x-a) + a\sqrt{4-a^2}$.

En prenant $a = 0$, on obtient : $y = 2x$; T a pour équation $\boxed{y = 2x}$

(b) $\forall x \in [0\,;\,2]$, $f(x) - 2x = x\sqrt{4-x^2} - 2x = x\left[\sqrt{4-x^2} - 2\right] \geqslant 0$, car $4 - x^2 \leqslant 4$ donc $\sqrt{4-x^2} \leqslant \sqrt{4} = 2$.

$\mathscr{C}$ est donc **en dessous** de T sur $[0\,;\,2]$.

Pour avoir la courbe sur $]2\,;\,2]$, on trace la courbe sur $[0\,;\,2]$, puis on complète par symétrie par rapport à O.



4. Solutions de l'équation (E) : $f(x) = 1$.

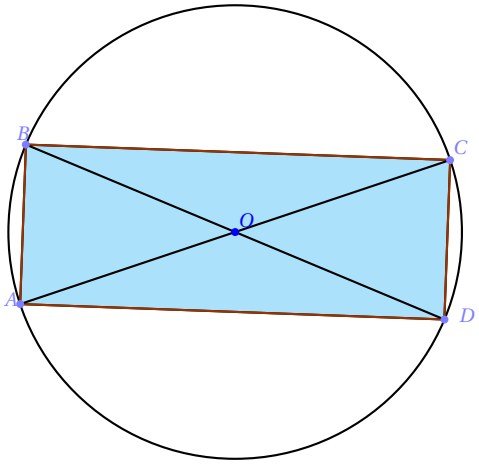
sur $0\,;\,\sqrt{2}$, f est continue (produit de fonctions continues), $f(0) = 0$ et $f(\sqrt{2}) = 2$. 1 appartient à l'intervalle $[0\,;\,2]$. D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution sur cet intervalle. Comme f est strictement croissante, cette solution est unique.

De même sur $[\sqrt{2}\,;\,0]$ avec f décroissante.

L'équation $f(x) = 1$ a donc deux solutions, α dans $[0\,;\,\sqrt{2}]$ et β dans $[\sqrt{2}\,;\,0]$.
À la calculatrice, on obtient $\boxed{0,51 < \alpha < 0,52}$ et $\boxed{1,93 < \beta < 1,94}$

Partie B : Étude d'une aire

Soient Γ un cercle de centre O et de rayon 1 et $ABCD$ un rectangle inscrit dans Γ.



On pose $AB = x$ et on associe, à ce réel x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de ce rectangle $ABCD$.

1. x appartient à l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve $BD = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$.
   On en déduit que l'aire $\mathscr{A}(x)$ est $\boxed{\mathscr{A}(x) = x\sqrt{4 - x^2} = f(x)}$.
2. (a) On reconnaît la fonction étudiée dans la partie A, donc l'aire est maximale pour $\boxed{x = \sqrt{2}}$.
   Pour cette valeur, on a $AB = \sqrt{2}$ et $AD = \sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = \boxed{\sqrt{2}}$: le rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est donc un **carré**
   (b) L'aire est égale à 1 pour $\boxed{x = \alpha \text{ et } x = \beta}$