TS : contrôle sur la fonction exponentielle et les exponentielles complexes

I (1,5 point)

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \dfrac{e^x}{e^{3x}}$ $\qquad B = \left(e^x\right)^3$ $\qquad C = \left(e^2\right)^3 \times e$

II (2,5 points)

Résoudre les équations suivantes :

a) $e^x = e$

b) $e^x = -2$

c) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

III (3 points)

Résoudre soigneusement l'inéquation :

$$e^{\frac{1}{x}} \leqslant e^{\frac{x}{x+2}}$$

IV (3 points)

Déterminer, en justifiant, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{-x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{e^x + 1}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{-x+1}$

V (3 points)

1. Expliquer pourquoi $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) = 1$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

VI (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.
2. Après avoir expliqué pourquoi la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
3. Dresser alors le tableau de variations.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

VII (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ (unité = 4 cm).

On note A, B, C et D les points d'affixes respectives

a=1 $\qquad b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad c = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

1. Écrivez c sous forme exponentielle.
2. (a) Placez les points A, B, C dans le repère.

   (b) Démontrez que OACB est un losange.

VIII Racine n^{ième} de l'unité (2 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n^{ième} de l'unité tout nombre complexe tel que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n^{ième} de l'unité. Par exemple : $\mathbb{U}_2 = \{-1\,;\,1\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ appartient à $\mathbb{U}_n$.
2. Réciproquement, montrer qu'un nombre complexe vérifiant $z^n = 1$ appartient à $\mathbb{U}_n$ (indication : écrire z sous la forme $re^{j\theta}$)