TS1-TS2 : contrôle commun n° 1 (3 heures)

I

On considère la suite v définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite v, puis conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
2. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

II

Donner, dans chacun des cas suivants, un contre-exemple justifiant l'affirmation :

a) Une suite croissante et majorée par 3 ne converge pas nécessairement vers 3.

b) Une suite bornée ne converge pas toujours.

c) Le produit de deux suites divergentes peut-être une suite convergente.

III

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en **annexe** (**à rendre avec la copie**) une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. (a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.
   (b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   (b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).

IV

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement supérieurs à 1.

1. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

   Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

   Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   (b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.
4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

V

Calculer (en justifiant) les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^2 + 5x + 1\right)$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^2 + 3x - 1}{2x + 3}\right)$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\right)$

4. $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x + 3}\right)$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1 + \sin(3x + 7))$

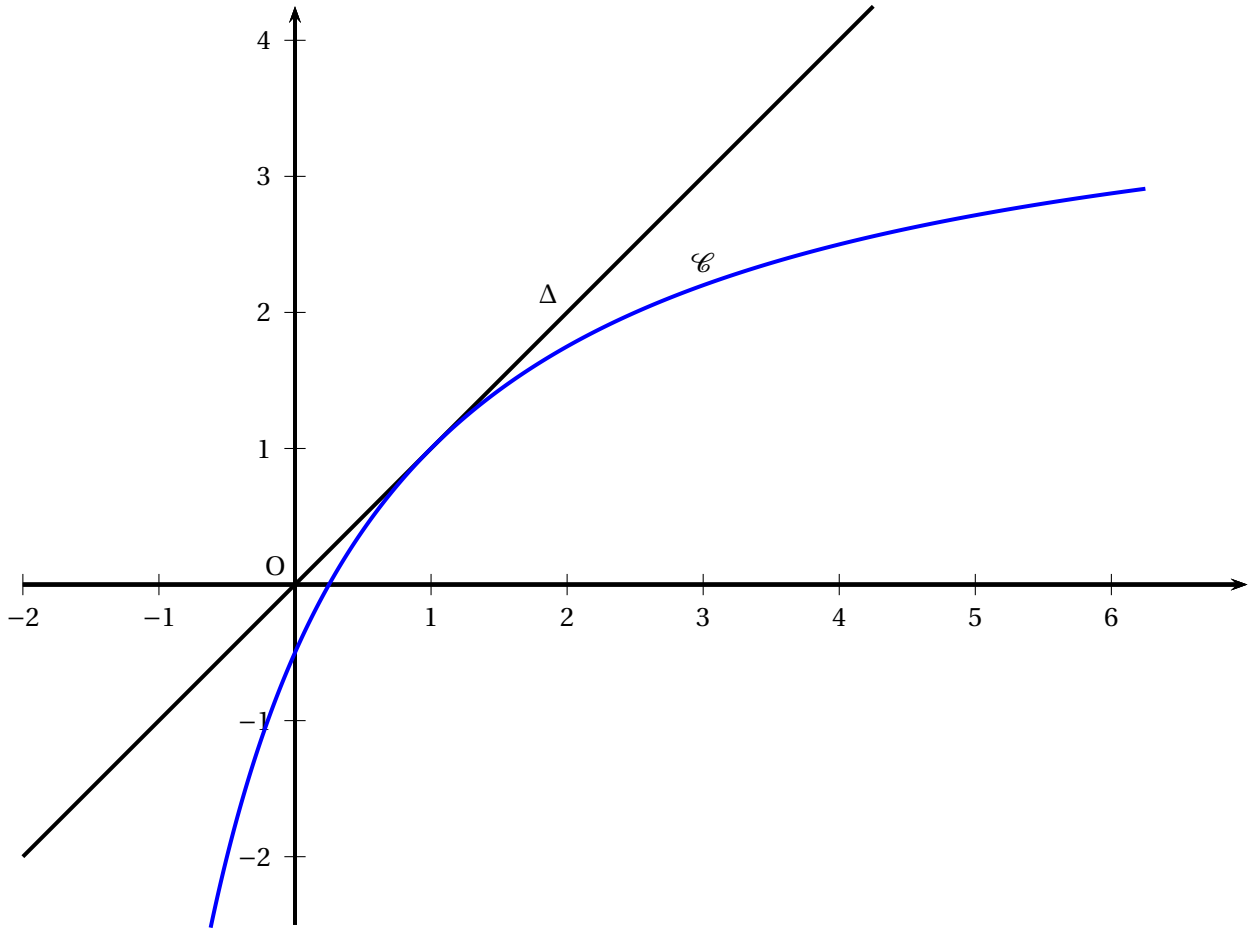
VI

f est la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x - 1}$..

1. Démontrer que, pour tout $x > 1$, $\dfrac{2x - 1}{x - 1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2x + 1}{x - 1}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

VII Bonus

On considère une suite u définie sur $\mathbb{N}$ et telle qu'aucun de ses termes ne soit nul.
On définit alors la suite v sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{4}{u_n}$ pour tout n. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si la suite u est convergente, alors la suite v est convergente.
2. Si la suite u est minorée par 2, alors la suite v est minorée pâr 2.
3. Si la suite u est décroissante, alors la suite v est croissante.
4. Si la suite u est divergente, alors la suite v admet 0 comme limite.

Annexe à l'exercice IV (à rendre avec la copie)