TS1-TS2 : contrôle commun n° 4 (4 heures)

I

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}.$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-dessous.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,206 3

n	6	...	99	100
u_n	0,169 3	...	0,010 2	0,010 1

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

II

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2e niveau et 100 vont au 3e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les événements suivants :

— N_1 : « La personne va au premier niveau. »
— N_2 : « La personne va au deuxiéme niveau. »
— N_3 : « La personne va au troisiéme niveau. »
— E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. (a) Montrer que la probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$.
   (b) Montrer que les événements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.
   (c) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2e niveau.
3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
   On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2e niveau.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer, à 10^{-4} prés, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2e niveau.
   (c) En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2e niveau ?
4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement « au moins un personne va au 2e niveau »soit supérieure ou égale à $0,99$.

III *Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité*

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathscr{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
   (b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.
   (c) En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1.$$

1. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   (b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
   à€ l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F.

III *Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité*

Les nombres de Mersenne sont les nombres de la forme $M_p = 2^p - 1$, avec p nombre premier.
Dans cet exercice, on va étudier des critères permettant de déterminer lesquels de ces nombres peuvent ou ne peuvent pas,être premiers.

Partie A : condition nécessaire

1. Calculer M_2, M_3, M_5 et M_7.
2. Justifier que M_7 est premier.
3. On étudie $M_n = 2^n - 1$, avec n entier naturel non premier. On suppose que d est un diviseur propre de n et que x est un entier strictement supérieur à 1.
   (a) Exprimer en fonction de x et de n la somme $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}$.
   (b) E déduire que $x^n - 1$ est divisible par $x - 1$.
   (c) Montrer que M_n est divisible par $2^d - 1$ (on pourra s'inspire de ce qui précède, en remarquant que $2^n = \left(2^d\right)^{\frac{n}{d}}$).
4. En déduire une condition nécessaire pour que M_n soit premier.
5. Cette condition est-elle suffisante ? (On pourra étudier le cas de $M11$).

Partie B : un théorème de Fermat pour limiter les calculs

On admet le théorème suivant :

Un diviseur premier positif d'un nombre de Mersenne M_p avec p premier impair est toujours de la forme $2\alpha p + 1$ avec α entier naturel.

1. En utilisant le théorème donné dans l'encadré, montrer que pour étudier M_13, il suffit de tester si ce nombre est divisible par 53 et 79.
2. En déduire que M_{13} est premier.
3. Étudier de même la primalité de M_{11}.

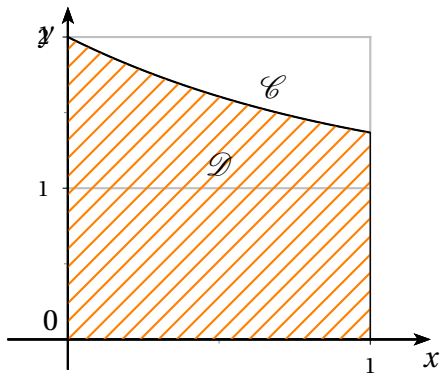
IV

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$g(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $g(x) > 0$.

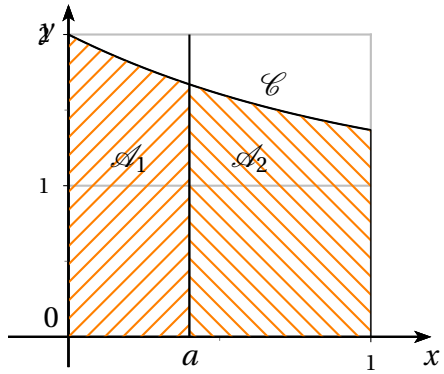
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox),les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



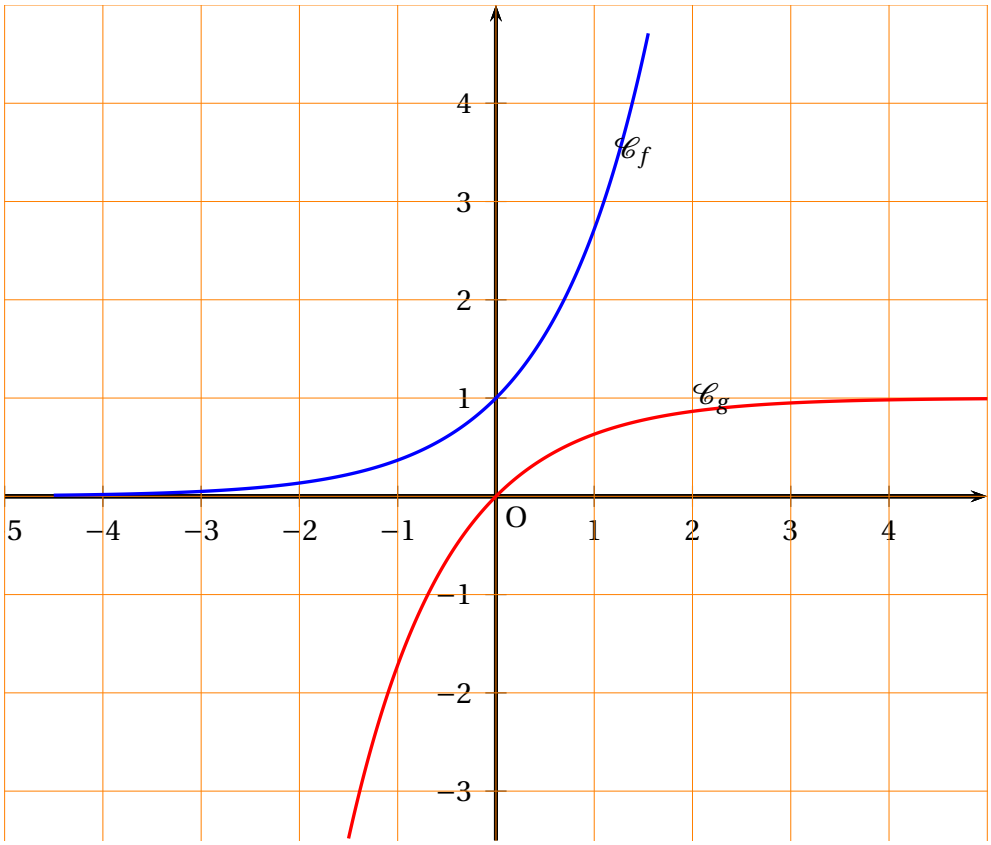
1. (a) Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1$.
   (b) Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On pourra utiliser un argument graphique.
2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

ANNEXE À L'EXERCICE III (à rendre avec la copie)