TS : exercices sur les arguments

I

Déterminer les modules et arguments des nombres complexes :

$a = (-1+\mathrm{i})^2$

$b = (1-\mathrm{i})^5$

$c = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2+2\mathrm{i}}$

II

Quels sont les entiers naturels n tels que $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n$ soit

a) réel ?

b) imaginaire pur ?

III

Soit θ un réel. Écrire sous forme trigonométrique les nombres :

$A = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$

$B = -\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

IV d'après le livre math'x

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes :

$$z_A = -1-\mathrm{i}\,;\ z_B = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\ ;\ z_c = 7-\mathrm{i}.$$

1. Faire une figure.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré.
4. Soient I le point d'affixe $z_I = 3-\mathrm{i}$ et Γ (Gamma) l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $|z-3+\mathrm{i}| = 4$.
   (a) Les points A, B, C et D appartiennent-ils à Γ ?
   (b) Quelle est la nature de Γ ? Construire cet ensemble.

V Amérique du Sud novembre 2011

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_\mathrm{A}, z_\mathrm{B}, z_\mathrm{C}$ et z_D où :
$$z_\mathrm{A} = 1+2\mathrm{i},\quad z_\mathrm{B} = \overline{z_\mathrm{A}},\quad z_\mathrm{C} = 1+\sqrt{3}+\mathrm{i},\quad z_\mathrm{D} = \overline{z_\mathrm{C}}.$$
   (a) Placer les points A et B dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
   (b) Calculer $\dfrac{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{A}-z_\mathrm{C}}$ et donner le résultat sous forme algébrique.
   (c) En déduire la nature du triangle ABC.
3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
4. Construire les points C et D dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. Expliquer la construction proposée.

VI Polynésie septembre 2011

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = 2-3\mathrm{i}$, $z_\mathrm{B} = \mathrm{i}$ et $z_\mathrm{C} = 6-\mathrm{i}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\dfrac{z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{A}}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

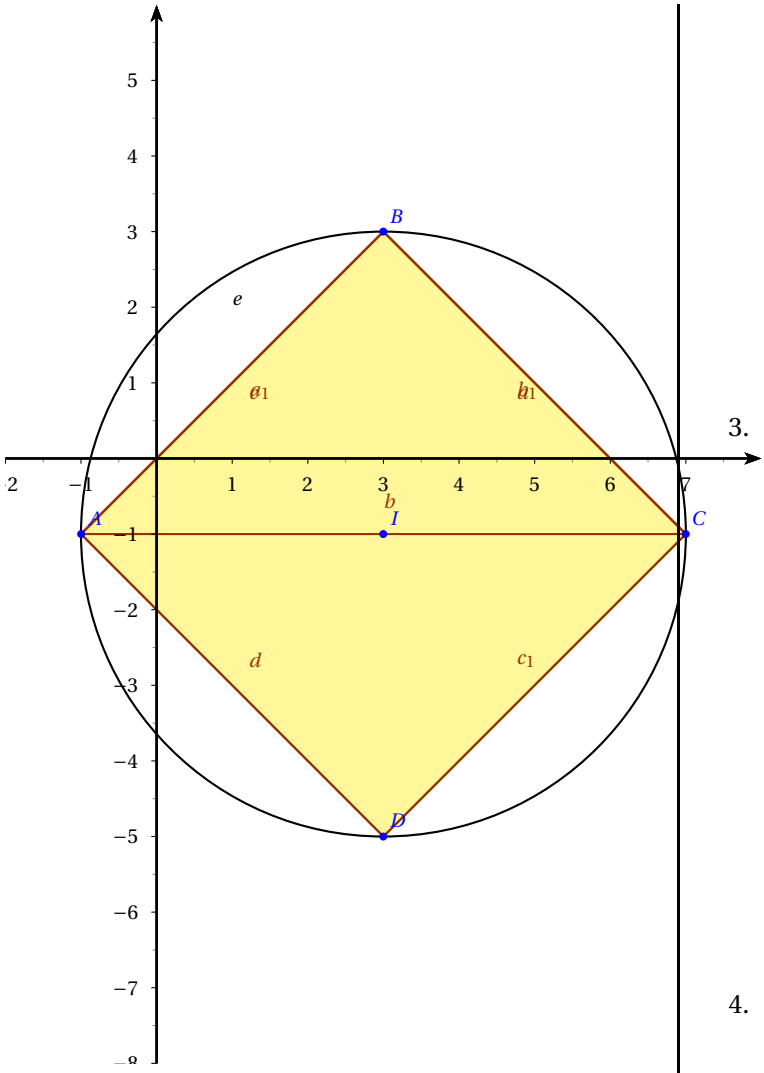
Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}(z-2+3\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}}$$

1. Soit D le point d'affixe $z_\mathrm{D} = 1-\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D′ image du point D par f.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe 2i.
   (b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $\mathrm{O}M' = \dfrac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M}$.
4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :
$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{B}M}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$
5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

Correction :

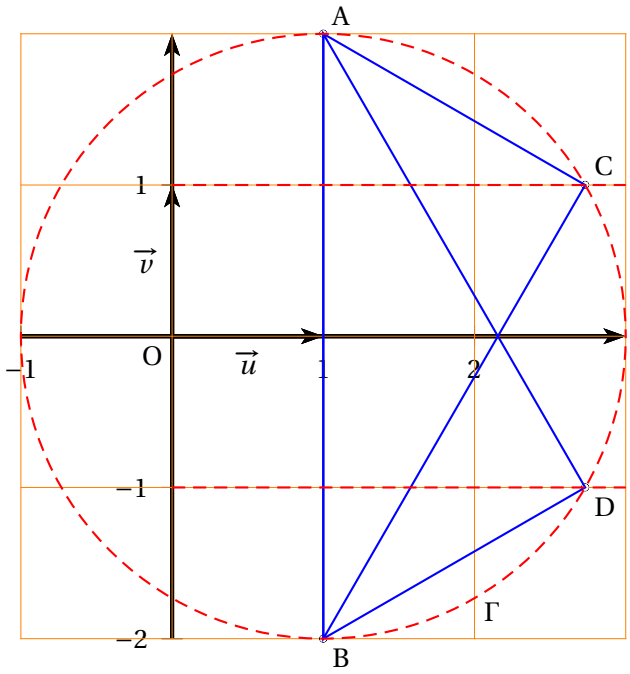


Amérique du Sud novembre 2011

1. Soit l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.
   $\Delta = -16 < 0$; l'équation a deux solutions complexes conjuguées.
   $z_1 = \dfrac{2 - \mathrm{i}\sqrt{16}}{2} = \boxed{1 - 2\mathrm{i}}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \boxed{1 + 2\mathrm{i}}$.
2. (a) Voir la figure ci-dessous.

   (b) $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{1 - 2\mathrm{i} - 1 - \sqrt{3} - \mathrm{i}}{1 + 2\mathrm{i} - 1 - \sqrt{3} - \mathrm{i}} \dfrac{-3\mathrm{i} - \sqrt{3}}{\mathrm{i} - \sqrt{3}} = \dfrac{-3\mathrm{i} - \sqrt{3}}{\mathrm{i} - \sqrt{3}}$
   $\dfrac{\left(-3\mathrm{i} - \sqrt{3}\right)\left(\mathrm{i} + \sqrt{3}\right)}{\left(\mathrm{i} - \sqrt{3}\right)\left(\mathrm{i} + \sqrt{3}\right)} = \dfrac{3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{\mathrm{i}^2 - 3} = \dfrac{-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{-4}$
   $= \boxed{\mathrm{i}\sqrt{3}}$.
   On pouvait aussi « deviner » qu'on pouvait factoriser, car on devine, après que nous avons tracé la figure, que le triangle est rectangle, donc que le nombre cherché est imaginaire pur, donc doit pouvoir se simplifier.
   En effet : $\dfrac{-3\mathrm{i} - \sqrt{3}}{\mathrm{i} - \sqrt{3}} = \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}\left[\mathrm{i} - \sqrt{3}\right]}{\mathrm{i} - \sqrt{3}} = \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   (c) $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \mathrm{i}\sqrt{3}$ (imaginaire pur) : cette égalité montre qu'un argument du quotient est égalà $\dfrac{\pi}{2}$, soit $\boxed{\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{\pi}{2}}$.
   Conclusion : le triangle ABC est **rectangle** en C. (non isocèle car $CB = \sqrt{3}CA$)
3. Le triangle ABC est rectangle d'hypoténuse [AB] ; il est donc **inscrit** dans un cercle Γ de centre le milieu de [AB] soit le point d'affixe 1 et de rayon $\dfrac{1}{2}AB = 2$.
   Dans la symétrie autour de l'axe $\left(O, \vec{u}\right)$ les points A et B sont symétriques de même que les points C et D puisque leurs affixes sont conjuguées.
   Le symétrique du triangle ABC est donc le triangle BAD. La symétrie étant une **isométrie**, c'est-à-dire une transformation qui conserve les longueurs et donc les angles, le triangle BAD est lui aussi rectangle en D donc inscrit dans le même cercle Γ centré au milieu de [AB] et de rayon 2.
   Sinon, on calcule le nombre $\dfrac{z_B - z_Z}{z_A - z_D}$. un argument vaut $\dfrac{\pi}{2}$ et correspond à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DB}\right)$.
4. C est le point dont l'affixe a une partie réelle positive, intersection du cercle précédent Γ et de la droite d'équation $y = 1$.idem pour D avec la droite d'équation $y = -1$.



Polynésie septembre 2011

Partie A

1. $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{i-2+3i}{6-i-2+3i} = \dfrac{-2+4i}{4+2i} = \dfrac{-1+2i}{2+i}$
$= \dfrac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{-2+2+i+4i}{4+1} = \dfrac{5i}{5} = \boxed{i}$.

2. Le résultat précédent $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ donne
$\dfrac{AB}{AC} = \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1$, ce qui signifie que $\boxed{AB = AC}$
et
$\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ donc B est l'image de C dans le quart de tour direct de centre A (rotation) : le triangle ABC est donc **rectangle et isocèle** en A.

Partie B

1. On a $z_{D'} = \dfrac{i(1-i-2+3i)}{1-i-i} = \dfrac{i(2i-1)}{1-2i} = \dfrac{-i(1-2i)}{1-2i} = \boxed{-i}$.

2. (a) Il faut résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, l'équation :
$z' = 2i \iff \dfrac{i(z-2+3i)}{z-i} = 2i \iff \dfrac{z-2+3i}{z-i} = 2 \iff$
$z-2+3i = 2(z-i) \iff -2+3i+2i = z \iff z = -2+5i$. Donc $\boxed{z_E = -2+5i}$.

   (b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AE}$ est $-2+5i-2+3i = -4+8i$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $i-2+3i = -2+4i$.
On a la relation de colinéarité : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$, donc les points A, B et E sont **alignés** (on peut même plus précisement dire que E est le symétrique de A autour de B.

3. Pour $z \neq i$, on a : $z' = \dfrac{i(z-2+3i)}{z-i} \iff z' = \dfrac{i(z-z_A)}{z-z_B}$ (1), d'où, en prenant les modules des deux membres,
$\boxed{OM' = \dfrac{AM}{BM}}$ avec $z \neq i$ ou encore M distinct de B.

4. De même en prenant les arguments des deux membres de l'équation (1), on obtient :

$$\boxed{\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}}$$

5. Si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors $AM = BM$; le résultat de la question 3. donne alors :
$OM' = 1 \iff M'$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique).

6. Si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et en utilisant le résultat de la question 4. on a alors :
$\dfrac{\pi}{2} = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à π près $\iff \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0$ à π près, ce qui signifie que les points A, B et M sont alignés.