TS TD sur les suites

I

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Justifier que, pour tout k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant n$.
3. En déduire la limite de la suite $(_n)$.

II

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$; $u_1 = 4$; $u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$

1. Trouver deux nombres réels a et b tels que : $a + b = 4$ et $ab = 1$
2. On note (v_n) la suite définie par : $v_n = u_{n+1} - au_n$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison b.
3. On note (w_n) la suite définie par : $w_n = u_{n+1} - bu_n$. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison a.
4. Expliciter v_n et w_n en fonction de n, puis en déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n.

III Polynésie juin 2014

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

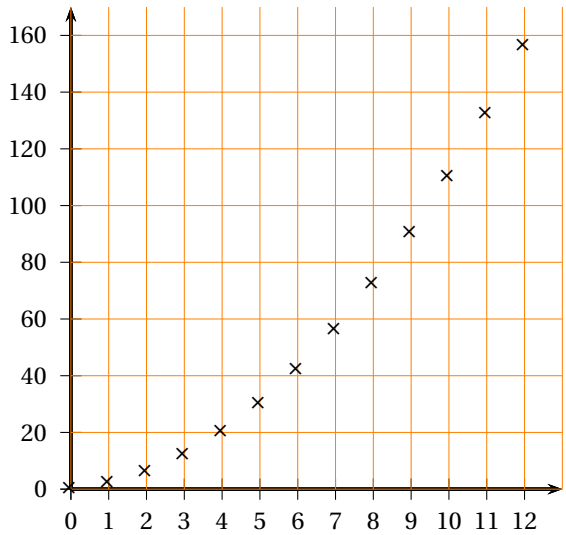
1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel u est un réel	**Variables :**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	**Traitement :**	u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



   (a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
   (b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
   Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.
   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.