Exercices de révision 18 avril 205

I Nouvelle-Calédonie mars 2012

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.

L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.

On considère les évènements suivants :

A : « obtenir 1 en lançant le dé »

B : « obtenir une boule noire ».

1. (a) Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.
   (b) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.
   (c) Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.
2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   (a) Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
   (b) Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.
   (c) On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3
k	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

   Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».

   À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

II Nouvelle Calédonie mars 2015

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles.

À la sortie de fabrication, 5 % d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.

On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1 000 heures. On observe que 2 % des puces livrées ont une durée de vie courte.

On note L l'évènement « La puce est livrée ».

On note C l'évènement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1 000 heures ».

Étant donné deux évènements A et B, on note $P_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.
   (a) Donner la valeur $P_L(C)$.
   (b) Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1 000 heures ?
   (c) Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine de fabrication ?

   Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce.

   On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   (a) Montrer que $\lambda = \frac{-\ln(0,98)}{1\,000}$.
   (b) Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à

   10 000 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
   (c) Calculer $P(20\,000 \leqslant X \leqslant 30\,000)$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.
3. Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à 0,003.

   On prélève au hasard 15 000 puces prêtes à être livrées- On admettra que ce prélèvement de 15 000 puces revient à effectuer un tirage avec remise de 15 000 puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées.

   On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puces ayant une vie courte dans cet échantillon.
   (a) Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et

   $p = 0,003$.
   (b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.
   (c) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité $P(40 \leqslant Y \leqslant 50)$.

III Polynésie juin 2011

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,
$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

IV Pondichéry avril 2012

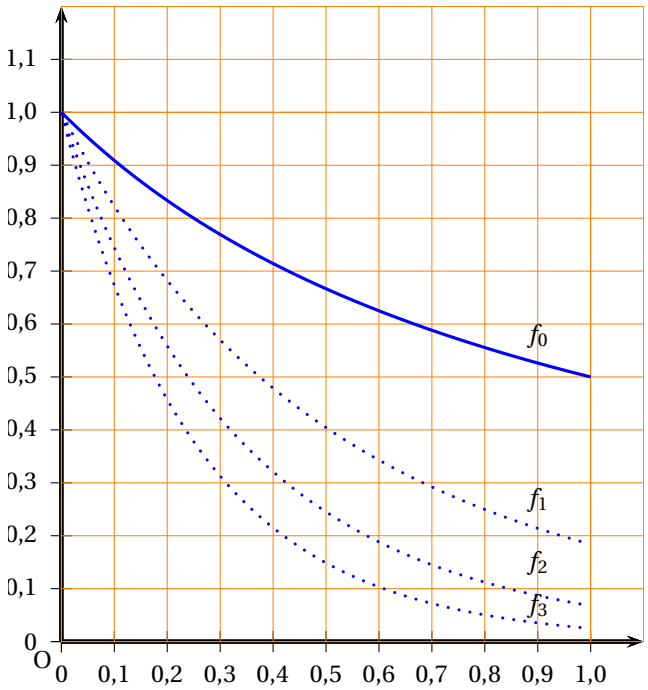
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



(a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

(b) Démontrer cette conjecture.

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

(b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. (a) Soient deux fonctions dérivables sur un un intervalle I. Montrer que $uv' = (uv)' - u'v$.

(b) En posant $u(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right).$$

(c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

V Liban mai 2012

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.
étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
3. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. (a) On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$.
En utilisant la formule $uv' = (uv)' - u'v$, calculer l'intégrale $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

(b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.

VI Centres étrangers juin 2014

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

r

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée

$0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

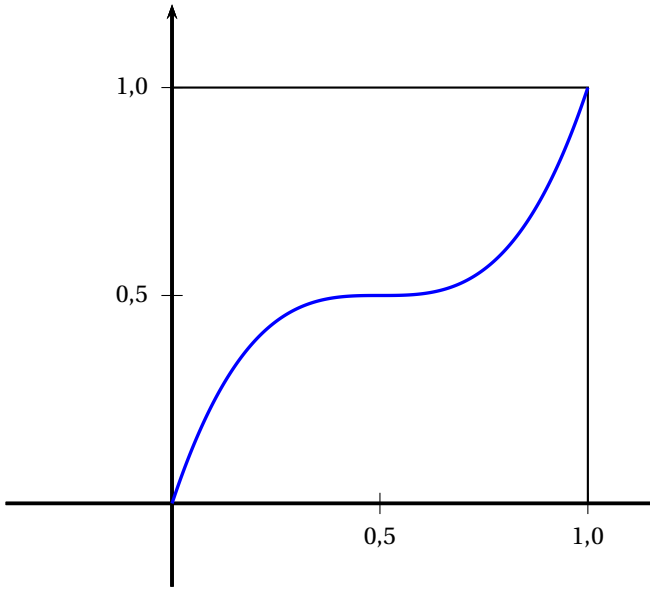
Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

(a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

(b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique ci-dessous, en faisant apparaître les pointillés utiles.



Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

(a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2) - (\mathrm{e}-1)x}{1 + (\mathrm{e}-1)x}$;

(b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

(c) Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.

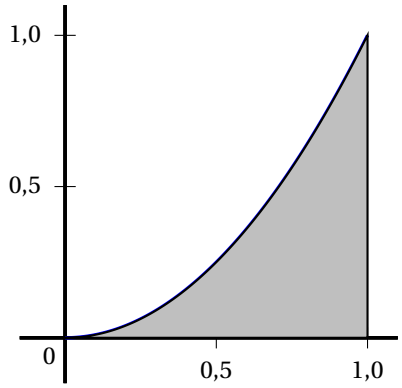
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale) y (nuance retouchée) E (écart) c (compteur) k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire x prend la valeur $\dfrac{k}{100}$ y prend la valeur $f(x)$ E prend la valeur $\lvert y-x\rvert$ Si $E \geqslant 0,05$, faire c prend la valeur $c+1$ Fin si Fin pour
Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-a-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$.
On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathscr{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.
Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{(x^2-1)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. (a) Calculer $\mathscr{A}_{f_1}$.
   (b) Calculer $\mathscr{A}_{f_2}$
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

VII Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+\mathrm{i}$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$