# TS1-TS2 : contrôle commun n° 2 (4 heures)

## I

Démontrer par récurrence sur $n$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

## II

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. $f$ est-elle continue en 0 ?
2. $f$ est-elle dérivable en 0 ?

## III

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \sqrt{3x^2+5x+9}$ sur $\mathbb{R}$

$f_2(x) = \dfrac{-3}{(2x-5)^4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

$f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $\mathbb{R}$

$f_4(x) = \sin(\sqrt{x})$ sur $]0\,;\infty[$

$f_5(x) = \sqrt{\sin(x)}$ sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$f_6(x) = \left(\dfrac{2x^2+x-5}{3x^2+x+4}\right)^5$ sur $\mathbb{R}$

## IV

Pour tout entier naturel $n$, on considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul , $u_n > 0$ .
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ , $u_{n+1}-1$ a le signe de $u_n - 1$ , puis que $u_{n+1}-1$ a le signe de $u_0 - 1$. En déduire que $u_n < 1$ pour tout $n$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
   (c) Que peut-on en déduire ?
4. Pour tout entier naturel $n$, on définit la suite $(v_n)$ par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.
   (a) Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.
   (b) Déterminer la nature de la suite $(v_n)$.
   (c) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ et calculer sa limite.
   (d) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

## V

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^3 - 2x^2 - 1\right)^4$.

1. Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.
   (a) Montrer que $u$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de cette racine.
   (b) En déduire le signe de $u$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Pourquoi le signe de $u^3$ est-il le même que celui de $u$ ?
2. Justifier que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$.
   (b) Étudier le signe de $f'$ et en déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.
5. Dresser le tableau de variations de f.

## VI

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 6}{x+1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f$ et étudier les variations de $f$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
6. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

## VII

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   (b) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions appartenant à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

## VIII

### Partie A :

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) Étudier le sens de variation de $g$ et montrer que l'equation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha$ dont on donnera un encadrement d'amplitude 0.1.

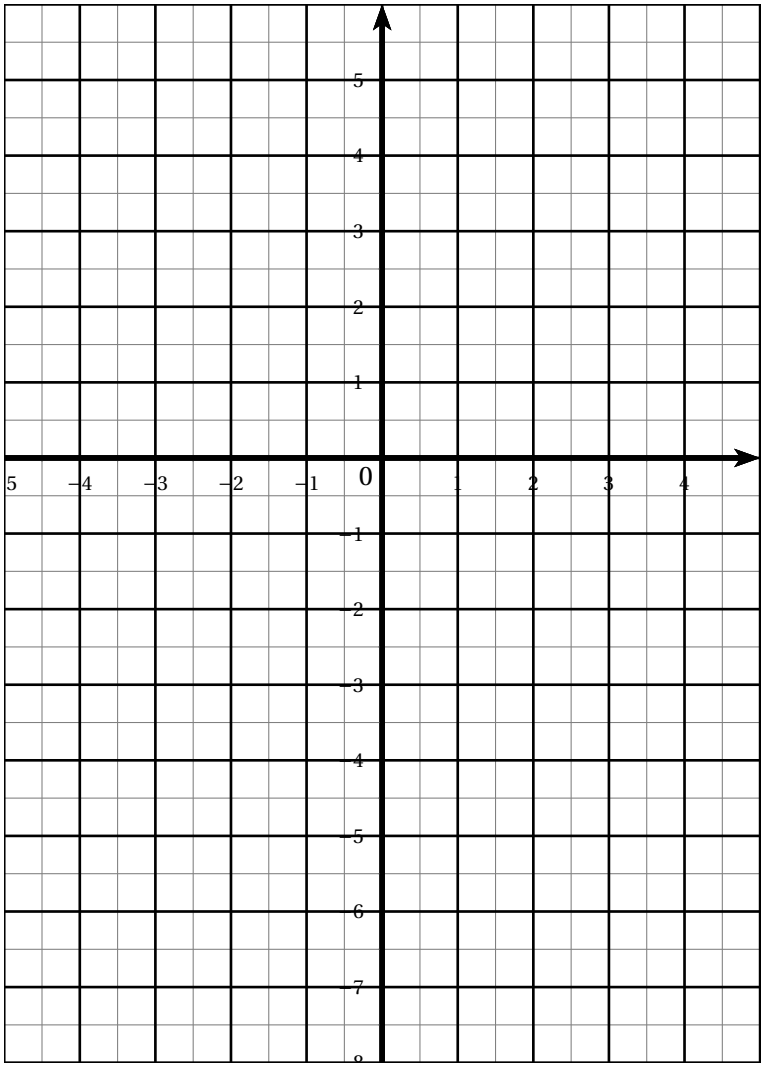
b) Préciser le signe de $g(x)$ selon la valeur de $x$.

### Partie B

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe representative ( unité 1cm)

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
   Étudier alors le sens de variation de f.
2. Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$, où $\alpha$ est le nombre déterminé dans la partie A.
4. Dresser le tableau de variation de $f$ .
5. Montrer qu'il existe quatre réels a b c et d tel que :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

6. (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - x\right] = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$.
   (b) On rappelle que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction en $-\infty$ ou en $+\infty$ si, et seulement si, la limite en $-\infty$ (ou $+\infty$) de $f(x) - [ax + b] = 0$.
   En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\Delta$.
   (c) En étudiant le signe de $f(x) - x$, donner la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\Delta$.
7. Determiner les abscisses des point B et B' de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallele à $\Delta$.
8. Tracer sur la feuille annexe $\Delta$ et $\mathscr{C}$ en plaçant les points B, B' ainsi que les trois points I, J et K d'abscisses respectives 1, 2 et -1 avec leur tangentes.

# ANNEXE À L'EXERCICE VIII