TS : contrôle sur les suites et démonstrations par récurrence (2 heures)

I

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9^n - 1$ est divisible par 8.

II

Démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n+1$.

III

Calculer la somme :
$S = 3+7+11+\cdots+119 = \sum_{i=0}^{i=29} (3+4i)$.

IV

1. Rappeler précisément ce que veut dire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Démontrer qu'une suite croisante non majorée tend vers $+\infty$

V

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(1+u_n) \end{cases}$.

1. Montrer que tous les termes de cette suite sont positifs.
2. Étudier les variations de cette suite.

VI D'aprés bac

On considére la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$:

$$w_0 = 1 \text{ et } nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1.$$

Le tableau ci-dessous donne les dix premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détailler le calcul permettant de calculer la valeur de w_{10}.
2. Conjecturer la nature de la suite (w_n) et démontrer cette conjecture.
3. En déduire l'expression de w_n en fonction de n et la valeur de w_{2000}.

VII

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+4}{3}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Le plan est rapporté à un repére orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ (unités graphiques : 2 cm).
   Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+4}{3}$.
   (a) Tracer la représentation graphique d de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.
   (b) En utilisant d et Δ, construire u_1, u_2 et u_3.
   (c) Conjecturer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ à l'aide de la construction, que l'on peut imaginer, d'un grand nombre de termes de la suite (u_n).
3. On considére la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 4$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = 4 - 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   (c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

VIII

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n-2}{2u_n-1} \end{cases}$

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) Démontrer que $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$
   (c) En déduire par récurrence qu'on a toujours $u_n > 1$ et donc que la suite (u_n) est bien définie pour tout n.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n-1}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
   (b) En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.