TS : Devoir sur feuille n° 6

I

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

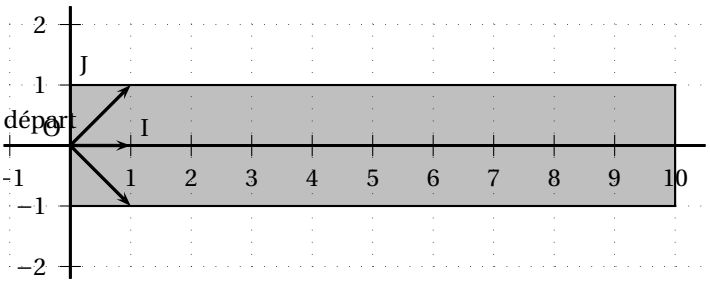
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à -dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées (0 ; 0) au début de la traversée. On note $(x\ ;\ y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ⩾ −1 et y ⩽ 1 et x ⩽ 9
        Affecter à n une valeur choisie au hasard entre
        −1, 0 et 1
        Affecter à y la valeur y + n
        Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
```

1. On donne les couples suivants : $(-1\ ;\ 1)$; $(10\ ;\ 0)$; $(2\ ;\ 4)$; $(10\ ;\ 2)$.
   Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.
2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x\ ;\ y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :
A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a
$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$$
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.
4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.
5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-dessous qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.
   Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

II

ANNULÉ (donné au DM5)

III

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.
Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.
On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout réel positif t, $p(Y \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Exprimer $p(Y \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.
2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?
4. Calculer la durée moyenne d_m d'un moteur. On arrondira à 10^{-1}.

IV

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. (a) Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{n}$$
   (b) Vérifier que
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} - f(n)$$
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul,
$$0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$
2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,
$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n$$
   (b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$
   (c) En déduire l'égalité
$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$
   (d) En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de
$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$
   (e) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$
   (f) Déterminer la limite de la suite (u_n).