TS : devoir sur feuille n° 5

I

On souhaite déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale du nombre $A = 2^{12345}$.

- Calculer à la calculatrice une valeur approchée de $\log(A)$ (logarithme décimal).
- En déduire un entier naturel N tel que $N \leqslant \log(A) < N+1$.
- En déduire un encadrement de A entre deux puissances de 10.
- En déduire alors le nombre de chiffres de l'écriture décimale de A.

II

Les deux parties A et B peuvent Ître traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

— La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).

— La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. (a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.

   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   (b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.

3. (a) Justifier par un calcul la phrase :

   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

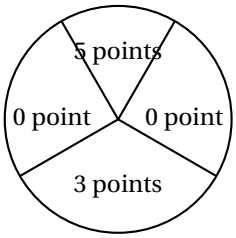
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramétres.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

III

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.

   On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.

   On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.

   On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

   On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisiéme fléchette.

   On note G_2 l'événement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».

   On note G_3 l'événement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».

   On note P l'événement : « le joueur perd la partie ».

   On note $p(A)$ la probabilité d'un événement A.

   (a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.

   On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$

   (b) En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue six parties avec les régles données à la question 2.

   Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.

   Si le joueur gagne en deux lancers, il reÁoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reÁoit 3 €. S'il perd, il ne reÁoit rien.

   On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

   (a) Donner la loi de probabilité de X.

   (b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

IV

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

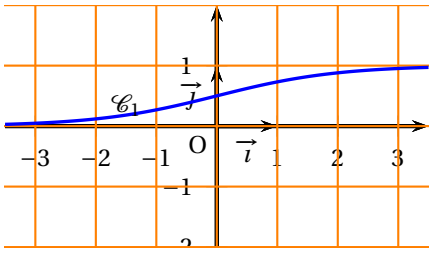
1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur le graphique ci-dessous.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

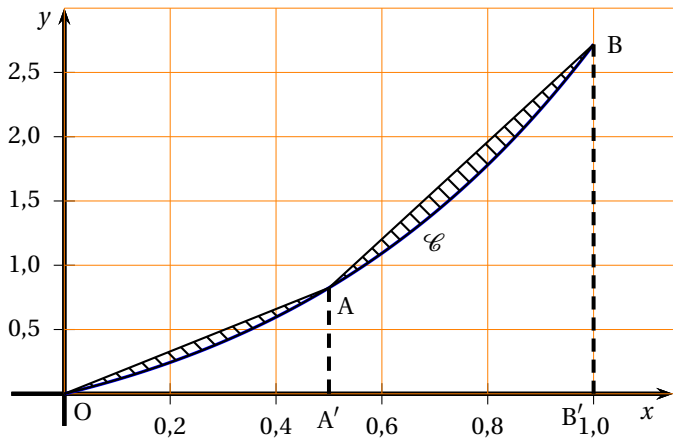
1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0{,}99$.

Représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1



V

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Sur la courbe $\mathscr{C}$, tracée ci-dessous, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$. On a placé les points $\mathrm{A}'(a\,;\,0)$ et $\mathrm{B}'(1\,;\,0)$.



Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$ (on montrera que $F : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f.
2. (a) Donner l'aire du triangle OAA′ et montrer que l'aire du trapèze ABB′A′ est égale à $\dfrac{1}{2}\left(-a^2\mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e}\right)$.
   (b) En déduire que l' aire de la partie du plan hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\right)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right) + \mathrm{e} - 2.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
   Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
   $g''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$.
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.