TS : devoir sur feuille n° 4

I

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x :
   $$f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}.$$
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité :
   $$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation
   $$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$
4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

II

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
   $$v_n = \frac{u_n}{n}.$$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,
   $$u_n = \frac{n}{2^n}.$$
4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).

III

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on appelle A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation

$$(E):\quad z^2-2z+2=0,$$

où z est un nombre complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z'=\frac{2z-1}{2z-2}.$$

1. Placer le point A et tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a
$$\left(z'-1\right)(z-1)=\frac{1}{2}.$$
3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :
   - $\mathrm{A}M\times\mathrm{A}M'=\dfrac{1}{2}$;
   - $M'\neq\mathrm{A}$;
   - $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)+\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right)=0+2k\pi$, où k est un entier relatif
4. On considère le point P d'affixe $z_{\mathrm{P}}=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P′, image de P par f, et réaliser cette construction.
6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x=\dfrac{3}{4}$. Soit M' son image par f.
   (a) Montrer que le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O de rayon 1.
   (b) Tout point de $\mathscr{C}'$ a-t-il un antécédent par f ?

IV

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=x^2+x-\frac{1+\ln x}{x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. On considère la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x)=2x^3+x^2+\ln x$.
   (a) Justifier que h est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$
   (b) Étudier les limites de h en $+\infty$ et 0.
   (c) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α ; en donner un encadrement d'amplitude 10^{-3}
   (d) En déduire le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.
   En déduire une asymptote à $\mathscr{C}$.
   (b) Justifier que $f'(x)$ a même signe que $h(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
   (d) Tracer alors la courbe représentative de f.