# TS : Devoir sur feuille n° 3

## I

Soit $(u_n)$ une suite convergeant vers 2.
Montrer que tous les termes de la suite sont positifs à partir d'un certain rang.

## II

On rappelle que pour une fonction $u$ dérivable sur un intervalle $I$, on a $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$ et que si $v$ est dérivable et ne s'annule pas sur $I$, $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
Soit $u$ une fonction qui ne s'annule pas sur un intervalle $I$ et dérivable sur $I$ ; soit $n$ un entier naturel.

1. Démontrer, à l'aide des deux formules rappelées ci-dessus, que $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.
2. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(3x^2+5x+3\right)^7}$.

## III

**Définition**

On note $0! = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ (produit des entiers naturels de 1 à $n$).
Ainsi a-t-on $1! = 1$, $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \cdots$

1. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $(n+1)!$ en fonction de $n!$
2. **Rappel** : on note $f^{(n)}$ la dérivée n$^{\text{ième}}$ de $f$, donc $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.
   On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) On admet que $f$ est dérivable à n'importe quel ordre sur $\mathbb{R}^*$.
   Calculer $f'(x)$,, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ et $f^{(5)}(x)$.
   (b) Émettre une conjecture sur la forme générale de $f^{(n)}(x)$.
   (c) Démontrer cette conjecture.

## IV

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2+x-2}{(x+2)^3}.$$

1. Quel est son ensemble définition $\mathscr{D}_f$ ?
2. Pourquoi $f$ est-elle dérivable sur $\mathscr{D}_f$ ?
3. Calculer $f'(x)$ ; montrer que l'on a
   $$f'(x) = \frac{2(x+1)(4-x)}{(x+2)^4}.$$
4. Étudier le signe de $f'(x)$ ; en déduire les variations de $f$. (attention, le tableau de variations n'est demandé qu'à la question 6. !)
5. Étudier les limites de $f(x)$ aux bornes de l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ .
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de $f$ ?
6. En déduire le tableau de variations de $f$.
7. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

## V

### Partie A

On considère le polynôme $P$ défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. (a) Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que
   $$P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right).$$
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

### Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1-\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et} z_{\mathrm{K}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Définition : $M'$ est l'image de $M$ par la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ si, et seulement si, $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}\,;\,\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.

   Soit D le point d'affixe $z_D = -1+\mathrm{i}$. On considère !a rotation $r$ de centre O qui transforme J en D.
   (a) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation $r$.
   (b) Soit C l'image du point L par la rotation $r$. Déterminer la longueur OC, puis un argument de $z_C$. Déterminer alors l'affixe du point C.
5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

## VI

On considère la suite $(z_n)$ à termes complexes définie par $z_0 = 1+\mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel $n$, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où $a_n$ est la partie réelle de $z_n$ et $b_n$ est la partie imaginaire de $z_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

### Partie A

1. Donner $a_0$ et $b_0$.
2. Calculer $z_1$, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

| |
|---|
| Variables : $A$ et $B$ des nombres réels<br>$K$ et $N$ des nombres entiers<br>Initialisation : Affecter à $A$ la valeur 1<br>Affecter à $B$ la valeur 1<br>Traitement :<br>Entrer la valeur de N<br>Pour $K$ variant de 1 à $N$<br>Affecter à $A$ la valeur $\dfrac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$<br>Affecter à $B$ la valeur $\dfrac{B}{3}$<br>FinPour<br>Afficher A |

   (a) On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$.
   Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à $10^{-4}$ près).

| $K$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |

   (b) Pour un nombre $N$ donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

### Partie B

1. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $z_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.
   En déduire l'expression de $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$, et l'expression de $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.
2. Quelle est la nature de la suite $(b_n)$ ? En déduire l'expression de $b_n$ en fonction de $n$, et déterminer la limite de $(b_n)$.
3. (a) On rappelle que pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ :

   $$\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

   Montrer que pour tout entier naturel $n$,

   $$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2|z_n|}{3}.$$

   (b) Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = |z_n|$.
   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$,

   $$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

   En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers une limite que l'on déterminera.

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite $(a_n)$ converge vers une limite que l'on déterminera.
4. Question facultative :
   - pour ceux qui le souhaitent, télécharger le logiciel Algobox sur votre ordinateur (sur http ://www.xm1math.net/algobox ) ou cliquer ici ;
   - Faire alors l'algorithme de cet exercice sur Algobox et m'envoyer le fichier par Internet.