TS : devoir sur feuille n° 2

Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. (Francis Bacon)

I Non convergence de la suite $\sin(n)$

1. Donner une valeur approchée de $\cos 1$ et $\sin 1$.
2. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sin(n+1) = \cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1).$$
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n).$$
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin(n)$ et $v_n = \cos(n)$.

   On effectue un raisonnement par l'absurde en supposant désormais que (u_n) a une limite **finie** ℓ.

   (a) En déduire de la relation établie en 2b) que (v_n) converge et préciser sa limite.
   (b) Déduire alors de la relation établie en 2a) que $\ell = 0$.
   (c) En considérant $u_n^2 + v_n^2$, montrer que
$$\ell^2 = 1.$$
   Qu'en déduit-on ?
   (d) En déduire que la suite $(\sin n)$ n'a pas de limite (finie ou non).

II

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée Saisir le nombre entier naturel non nul N. **Traitement** Affecter à U la valeur 0 Pour k allant de 0 à $N-1$ Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$ Fin pour **Sortie** Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   (b) Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.
   (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
   (d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

III

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictemenl positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

3. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

IV Approximation de $\sqrt{3}$: Suite dé Héron d'Alexandrie

Soit la suite u définie par
$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) = f(u_n)$ avec
$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Montrer par récurrence sur n que, pour tout n, $u_n > \sqrt{3}$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. En déduire la limite ℓ de cette suite.
6. Que se passe-t-il si l'on choisit comme valeur pour u_0 un autre nombre de $]\sqrt{3}\,;\,+\infty[$
7. Que se passe-t-il pour $u_0 = \sqrt{3}$?
8. Que se passe-t-il pour $u_0 \in]0\,;\,\sqrt{3}[$?
9. Proposer un algorithme qui demande à l'utilisateur une valeur de $u_0 > \sqrt{3}$, un nombre p et qui donne le premier rang à partir duquel le terme u_n est une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-p} près.