TS : devoir sur feuille n° 1

La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques. » (Blaise Pascal)

I

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{2x+3}{x+5} \geqslant \dfrac{-5x-2}{x-1}$.

II

1. Démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique si, et seulement si, il existe a et b réels tels que $u_n = an + b$ pour tout n.
2. Démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique si, et seulement si, il existe a et q réels tels que $u_n = aq^n$ pour tout n.

Pour démontrer une équivalence, il faut démontrer les deux implications (directe et réciproque)

III

Rappel : un nombre q est rationnel si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs a et b ($b \neq 0$) tels que $q = \dfrac{a}{b}$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

Démontrer par récurrence , que pour tout n, u_n est un nombre rationnel.

IV

La suite de Fibonacci est la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_1 = F_2 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}.$$

V

Héléne a acheté une voiture d'occasion à 3 500 € le 1er janvier 2006.
Une étude statistique montre que si u_n et u_{n+1} sont les valeurs de cette automobile le 1er janvier respectivement de la n-iéme année et de la $(n+1)$-iéme qui suivent l'achat, alors :

$$u_{n+1} = 0,7u_n + 210.$$

On pose $u_0 = 3\,500$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier n, on pose : $v_n = u_n - \alpha$, où α est solution de l'équation $x = 0,7x + 210$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   (b) En déduire les expressions de v_n puis de u_n en fonction de n.
3. Déterminer par approximations à l'aide de la calculatrice à partir de quelle date la voiture vaudra moins de 1 000 €.

VI D'après bac

On note u_n le nombre de foyers, exprimés en millions, possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par $f(x) = \dfrac{1}{10}x(20-x)$.
   (a) Étudier ores variations de f.
   (b) En déduire que, pour tout x de $[0\,;\,10]$, $f(x) \in [0\,;\,10]$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
   penser à utiliser les résultats des questions précédentes 1. (a) et 1. (b)
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ (on admettra que ℓ est solution de l'équation $x = f(x)$).